

FAMILLES D'ESPACES DE M-JETS ET D'ESPACES D'ARCS

MAXIMILIANO LEYTON-ÁLVAREZ

RÉSUMÉ. Soit V une variété algébrique définie sur un corps \mathbb{K} algébriquement clos et de caractéristique nulle. Comme les espaces de m -jets V_m et l'espace d'arcs V_∞ fournissent des informations sur la géométrie de la variété V , il est donc naturel de se poser les questions suivantes : Quand est-ce qu'une déformation de V induit une déformation des espaces V_m , $1 \leq m \leq \infty$? Si l'on considère une déformation de V qui admet une résolution simultanée à plat, comment variera l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V ? Dans la section 3, on donne quelques réponses partielles à ces questions.

Dans la section 4, on montre deux familles d'hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ où l'application de Nash est bijective. De plus, dans chaque cas, on donne explicitement une désingularization où toutes les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle sont des diviseurs essentiels. Il faut remarquer que dans la littérature on ne trouve pas beaucoup d'exemples de ce type.

ABSTRACT. **Families of m-jet spaces and arc spaces.**

Let V be an algebraic variety defined over an algebraically closed field \mathbb{K} of characteristic zero. The m -jet spaces V_m and the space of arcs V_∞ provide the information on the geometry of the variety V , therefore it is natural to ask the following questions: When will a deformation of V induce a deformation of the spaces V_m , $1 \leq m \leq \infty$? If one considers a deformation of V which admits a flat simultaneous resolution, how will the image of the Nash application \mathcal{N}_V vary? In section 3 some partial answers to these questions can be found.

In section 4 two families of hypersurfaces of $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ are shown in which the Nash application is bijective. What's more, in each case a desingularization in which all the irreducible components of the exceptional fiber are essential divisors is explicitly given. It is important to note that very few examples of this type are found in the literature.

1. INTRODUCTION

Soit V une variété algébrique sur un corps \mathbb{K} algébriquement clos ou une variété analytique complexe ($\mathbb{K} := \mathbb{C}$). Dans la fin des années 60, John Nash a introduit l'espace d'arcs V_∞ dans le but d'obtenir des informations sur la géométrie locale du lieu singulier $\text{Sing } V$ de V (voir [Nas95]). L'espace d'arcs V_∞ peut être interprété comme l'ensemble de tous les arcs $\text{Spec } \mathbb{K}[[t]] \rightarrow V$, muni d'une structure "naturelle" de schéma sur \mathbb{K} . Une *composante de Nash* associée à V est une famille d'arcs sur V passant par le lieu singulier de V . Un diviseur essentiel E sur V est grosso modo un diviseur exceptionnel dans une désingularisation de V qui apparaît comme une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de toute désingularisation possible de V . Nash a défini une application de l'ensemble des composantes de Nash associées à V dans l'ensemble des diviseurs essentiels sur V et il a démontré qu'elle est injective; cette application est connue sous le nom *d'application de Nash*, notée \mathcal{N}_V . Nash pose donc la question suivante : Est-ce que la application \mathcal{N}_V est bijective? (pour plus de détails voir la section 2.2). Étant donné explicitement une variété V et une désingularisation π , on remarque que déterminer si une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π est ou non un diviseur essentiel reste un problème difficile. L'approche de Nash est donc très

Date: 14 juillet 2015.

Soutien Financier : Projet FONDECYT N° : 11121163 .

intéressante.

De nombreux mathématiciens, qu'on ne peut pas tous citer ici, ont apporté de nouvelles contributions originales à l'étude du problème de Nash, surtout dans le cas de variétés de dimension 2 et 3 (voir par exemple [LJ80], [Reg95], [GSLJ97], [LJRL99], [IK03], [Ish05], [Ish06], [PPP06], [GP07], [Mor08], [Plé08], [PPP08], [Pet09], [LA11], [FdB12], [PS12], [dFD14]).

Dans le cas des surfaces, le problème est resté ouvert jusqu'à l'année 2011, quand les auteurs de l'article [FdB12] ont donné une réponse positive à la question de Nash pour toutes les singularités de surfaces sur \mathbb{C} .

Dans l'article [IK03] de l'année 2003, les auteurs ont découvert le premier exemple d'une variété V telle que l'application de Nash \mathcal{N}_V n'est pas bijective; cette variété est une hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^5$ ayant une unique singularité isolée. Les exemples de variétés de dimension trois où l'application de Nash n'est pas bijective ont apparus au cours de l'année 2012, (voir les articles [dF13] et [Kol12]); ces exemples sont des hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ ayant une unique singularité isolée. Vous trouverez plus d'exemples, pour dimensions supérieures ou égales à trois, dans l'article [JK13]. Comme il est indiqué dans l'article antérieurement cité, tous les exemples connus de variétés où la réponse à la question de Nash est négative, sont obtenus en utilisant la même méthode centrale. Les auteurs définissent donc les diviseurs *très essentiels* sur une variété V , qui sont grosso modo les diviseurs essentiels sur V qui ne satisfont pas les hypothèses de la méthode centrale. La question qui se pose est alors la suivante : Est-ce que l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V correspond à l'ensemble des diviseurs très essentiels sur V ? Cette question est très intéressante, mais c'est un problème que nous n'aborderons pas ici.

Mais au-delà du problème de Nash, c'est important d'étudier les espaces de m -jets et l'espace de arcs, parce qu'ils fournissent des informations sur la géométrie de la variété sous-jacente, par exemple, voir les articles suivants : [Mus01], [EM09], [DL99] et [DL02]. Les espaces d'arcs et les espaces de m -jets ont été utilisés aussi pour solutionner certains problèmes qui ont été considérés comme des problèmes difficiles à résoudre, par exemple, la Conjecture de Batyrev sur les variétés de Calabi-Yau (voir [Kon95]).

Dans le but de mieux comprendre la relation entre la variété V et les espaces V_m , $1 \leq m \leq \infty$, il est naturel de se poser la question suivante : Est-ce qu'une déformation de la variété V induit une déformation (compatible) des espaces de m -jets V_m et de l'espace d'arcs V_∞ ? L'examen de cette question est le sujet de la première moitié de la section 3.

Dans la deuxième moitié de cette section, on aborde et on donne quelques résultats partiels au problème suivant : si on considère une déformation d'une désingularisation $\pi : X \rightarrow V$ (en préservant la condition d'être une désingularisation) qui induit une déformation de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$, comment variera l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V ? Plus précisément, si E est un diviseur essentiel (ou très essentiel) sur V , est-ce que la "déformation" de E sera un diviseur essentiel (ou très essentiel) sur la "déformation" de V ? (pour plus de précisions et de détails voir la section 3.2).

Dans la section 4, on considère deux familles d'hypersurfaces normales de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ et on montre que pour chaque hypersurface considérée, l'application de Nash qui y est associée est bijective. De plus, dans chaque cas on donne explicitement une désingularisation où tous les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle sont des diviseurs essentiels.

Dans la Section 2 on fait quelques rappels sur les dérivations de Hasse-Schmidt, les espaces de m -jets, l'espace d'arcs, le problème de Nash, les variétés toriques, et les résolutions de singularités d'hypersurfaces.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Mark Spivakovsky pour les nombreuses discussions et son constant encouragement. Je remercie également Antonio Campillo pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

2. PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

2.1. Dérivations de Hasse-Schmidt. Dans cette section, on donne quelques résultats et notions de base sur les dérivations de Hasse-Schmidt, l'espace de m -jet relatif et l'espace d'arcs relatif. Notre but ici n'est pas de donner un exposé exhaustif de la théorie, mais plutôt de donner un aperçu de celle-ci dans le cadre qui nous intéresse. Pour plus détails, voir [Voj07].

Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, P une \mathbb{K} -algèbre et R, Q deux P -algèbres.

Une *dérivation de Hasse-Schmidt d'ordre $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$* de R vers Q est un $m+1$ -uplet (D_0, \dots, D_m) , où $D_0 : R \rightarrow Q$ est un homomorphisme de P -algèbre et $D_i : R \rightarrow Q$, $1 \leq i \leq m$, est un homomorphisme de groupes abéliens, qui satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $D_i(p) = 0$ pour tout $p \in P$ et pour tout $1 \leq i \leq m$;
- (2) Pour tous les éléments x et y de R et pour tout entier $1 \leq k \leq m$, on a :

$$D_k(xy) = \sum_{i+j=k} D_i(x)D_j(y).$$

On remarque que si $\phi : Q \rightarrow Q'$ est un homomorphisme de P -algèbre et (D_0, \dots, D_m) une dérivation de Hasse-Schmidt de R vers Q , alors $(\phi \circ D_0, \dots, \phi \circ D_m)$ est une dérivation de Hasse-Schmidt de R vers Q' . Par conséquent, on peut définir le foncteur suivant :

$$\text{Der}_P^m(R, \cdot) : P\text{-Alg} \rightarrow \mathcal{E}ns; Q \mapsto \text{Der}_P^m(R, Q)$$

où $P\text{-Alg}$ (resp. $\mathcal{E}ns$) est la catégorie des P -algèbres (resp. des ensembles) et $\text{Der}_P^m(R, Q)$ est l'ensemble des dérivations de Hasse-Schmidt d'ordre m de R vers Q .

De la même façon, on peut définir la dérivation de Hasse-Schmidt d'ordre ∞ et le foncteur $\text{Der}_P^\infty(R, \cdot)$ en utilisant, à la place du $m+1$ -uplet (D_0, \dots, D_m) , une suite infinie D_0, D_1, \dots .

On remarque que le foncteur des dérivations de Hasse-Schmidt d'ordre 1 $\text{Der}_P^1(R, \cdot)$ est le foncteur de dérivations de Kähler $\text{Der}_P(R, \cdot)$. Il est bien connu que ce foncteur est représentable par l'algèbre symétrique du R -module des différentiels de Kähler, c'est-à-dire :

$$\text{Der}_P(R, \cdot) \cong \text{Hom}_P(\text{Sym}(\Omega_{R/P}), \cdot),$$

La proposition suivante est une généralisation du résultat ci-dessus.

Soit $\text{HS}_{R/P}^m$ la R -algèbre quotient de l'algèbre $\text{Sym}(\bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{x \in R} R d^i x)$ par l'idéal I engendré par la réunion des ensembles r_1, r_2 et r_3 , où $r_1 := \{d^i(x+y) - d^i(x) - d^i(y) \mid x, y \in R; 1 \leq i \leq m\}$, $r_2 := \{d^i(s) \mid s \in P; 1 \leq i \leq m\}$ et $r_3 := \{d^k(xy) - \sum_{i+j=k} d^i(x)d^j(y) \mid x, y \in R; 1 \leq k \leq m\}$.

On remarque que $\text{HS}_{R/P}^0 = R$ et que $\text{HS}_{R/P}^1 = \text{Sym}(\Omega_{R/P})$, par contre, dans le cas $m \geq 2$, l'algèbre $\text{HS}_{R/P}^m$ devient beaucoup plus difficile à comprendre.

On remarque aussi que $\text{HS}_{R/P}^m$ est une algèbre graduée par la graduation $d^i x \mapsto i$. D'après la définition de l'algèbre $\text{HS}_{R/P}^m$, on obtient, de façon naturelle, une suite d'homomorphismes d'algèbres graduées :

$$\mathrm{HS}_{R/P}^0 \rightarrow \mathrm{HS}_{R/P}^1 \cdots \rightarrow \mathrm{HS}_{R/P}^m \rightarrow \mathrm{HS}_{R/P}^{m+1} \rightarrow \cdots$$

On note $\mathrm{HS}_{R/P}^\infty$, la limite inductive du système inductif $\mathrm{HS}_{R/P}^m$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{HS}_{R/P}^\infty := \lim_{m \rightarrow} \mathrm{HS}_{R/P}^m.$$

Proposition 2.1 ([Voj07]). *L'algèbre de Hasse-Schmidt $\mathrm{HS}_{R/P}^m$, $0 \leq m \leq \infty$, représente le foncteur de dérivations de Hasse-Schmidt $\mathrm{Der}_P^m(R, \cdot)$, c'est à dire*

$$\mathrm{Der}_P^m(R, Q) \cong \mathrm{Hom}_P(\mathrm{HS}_{R/P}^m, Q),$$

où Q est une P -algèbre quelconque.

L'algèbre de Hasse-Schmidt $\mathrm{HS}_{R/P}^m$, $0 \leq m \leq \infty$ satisfait les propriétés de localisation suivantes :

Proposition 2.2 ([Voj07]). *Soient $0 \leq m \leq \infty$ et L (resp. L_1) un sous-ensemble multiplicatif de l'algèbre R (resp. P). Alors, on a :*

- (1) $\mathrm{HS}_{R/P}^m[L^{-1}] \cong \mathrm{HS}_{R[L^{-1}]/P}^m$;
- (2) si le morphisme $P \rightarrow R$ se factorise par le morphisme canonique $P \rightarrow P[L_1^{-1}]$, alors $\mathrm{HS}_{R/P}^m \cong \mathrm{HS}_{R/P[L_1^{-1}]}^m$

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. En prenant un recouvrement par des ouverts affines de X compatible avec un recouvrement par des ouverts affines de Y et en utilisant les propriétés de localisation ci-dessus, on peut définir un faisceau quasi-cohérent, $\mathrm{HS}_{\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y}^m$, $1 \leq m \leq \infty$, de \mathcal{O}_X -Algèbres qui ne dépend pas des recouvrements choisis.

Définition 2.3. *Pour chaque $0 \leq m \leq \infty$, on pose :*

$$\mathrm{X}(Y)_m := \mathbf{Spec} \mathrm{HS}_{\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y}^m$$

où $\mathbf{Spec} \mathrm{HS}_{\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y}^m$ est le spectre relatif du faisceau quasi-cohérent de \mathcal{O}_X -Algèbres $\mathrm{HS}_{\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y}^m$. Si $Y := \mathrm{Spec} \mathbb{K}$, on pose $X_m := \mathrm{X}(\mathrm{Spec} \mathbb{K})_m$.

Pour $0 \leq m < \infty$ (resp. $m = \infty$), le schéma $\mathrm{X}(Y)_m$ (resp. $\mathrm{X}(Y)_\infty$) est appelé l'espace de m -jets (resp. d'arcs) du morphisme $f : X \rightarrow Y$.

Les résultats suivants justifient la terminologie "Espace de m -jet et Espace d'arc du morphisme $f : X \rightarrow Y$ ".

On remarque qu'on peut définir les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_P^m(R, Q) &\rightarrow \mathrm{Hom}_P(R, Q[t]/(t^{m+1})); \\ (D_0, \dots, D_m) &\rightarrow \begin{cases} R \rightarrow Q[t]/(t^{m+1}); \\ x \mapsto D_0(x) + \cdots + D_m(x)t^m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_P^\infty(R, Q) &\rightarrow \mathrm{Hom}_P(R, Q[[t]]); \\ D_0, D_1 \cdots &\rightarrow \begin{cases} R \rightarrow Q[[t]]; \\ x \mapsto D_0(x) + D_1(x)t + \cdots \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant les applications ci-dessus, on peut démontrer le résultat suivant

Proposition 2.4 ([Voj07]). *Le foncteur $Q \mapsto \mathrm{Der}_P^m(R, Q)$, $0 \leq m < \infty$, (resp. $Q \mapsto \mathrm{Der}_P^\infty(R, Q)$) est isomorphe au foncteur $Q \mapsto \mathrm{Hom}_P(R, Q[t]/(t^{m+1}))$ (resp. $Q \mapsto \mathrm{Hom}_P(R, Q[[t]])$).*

Les théorèmes suivants sont une conséquence des Propositions 2.1 et 2.4

Théorème 2.5. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Alors, l'espace de m -jet $X(Y)_m$ de $f : X \rightarrow Y$ représente le foncteur de m -jets, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Hom}_Y(Z \times_{\mathbb{K}} \mathrm{Spec} \mathbb{K}[t]/(t^{m+1}), X) \cong \mathrm{Hom}_Y(Z, X(Y)_m),$$

où Z est un Y -Schéma quelconque.

Théorème 2.6. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Alors, l'espace d'arcs $X(Y)_{\infty}$ de $f : X \rightarrow Y$ représente le foncteur d'arcs, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Hom}_Y(Z \widehat{\times}_{\mathbb{K}} \mathrm{Spec} \mathbb{K}[[t]], X) \cong \mathrm{Hom}_Y(Z, X(Y)_{\infty})$$

où Z est un Y -Schéma quelconque et $Z \widehat{\times}_{\mathbb{K}} \mathrm{Spec} \mathbb{K}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Z \times_{\mathbb{K}} \mathrm{Spec} \mathbb{K}[[t]]$ le long du sous-schéma $Z \times_{\mathbb{K}} \mathrm{Spec} \mathbb{K}$.

Les espaces de m -jets et l'espace d'arcs d'un morphisme satisfont la propriété suivante :

Proposition 2.7 ([Voj07]). *Soient $f : X \rightarrow Y$ et $Y' \rightarrow Y$ deux morphisme de schémas, et on pose $X' := X \times_Y Y'$. Alors, $X'(Y')_m \cong X(Y)_m \times_Y Y'$, sur Y' pour tout $0 \leq m \leq \infty$. En particulier, il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X'(Y')_m & \xrightarrow{\quad} & X(Y)_m \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

2.2. L'espace d'arcs et le problème de Nash. Soient \mathbb{K} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, V une variété algébrique normale sur \mathbb{K} et $\pi : X \rightarrow V$ une désingularisation divisorielle de V .

Étant donné une désingularisation quelconque $\pi' : X' \rightarrow V$, l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ est bien définie en codimension 1 (X est une variété normale). Si E est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π , alors il existe un ouvert E^0 de E sur lequel l'application $(\pi')^{-1} \circ \pi$ est bien définie. Le diviseur E est appelé *diviseur essentiel* sur V si pour toute désingularisation $\pi' : X' \rightarrow V$, l'adhérence de Zariski $(\pi')^{-1} \circ \pi(E^0)$ est une composante irréductible de $(\pi')^{-1}(\mathrm{Sing} V)$, où $\mathrm{Sing} V$ est le lieu singulier de V . On note $\mathrm{Ess}(V)$ l'ensemble des diviseurs essentiels sur V .

On rappelle que V_{∞} est l'espace d'arcs sur V et que les K -points de V_{∞} sont en correspondance bijectives avec les K -arcs sur V . Soient $\alpha \in V_{\infty}$ et \mathbb{K}_{α} le corps résiduel du point α . Par abus de notation, on note aussi α le \mathbb{K}_{α} -arc qui correspond au point $\alpha \in V_{\infty}$. Soit $p : V_{\infty} \rightarrow V$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\mathrm{Spec} \mathbb{K}_{\alpha}[[t]]$. On note $\mathcal{CN}(V)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $V_{\infty}^s := p^{-1}(\mathrm{Sing} V)$. Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_V : \mathcal{CN}(V) \rightarrow \mathrm{Ess}(V)$ qui associe à $C \in \mathcal{CN}(V)$ l'adhérence $\overline{\{\widehat{\alpha}_C(0)\}}$ est une application bien définie et injective, où $\widehat{\alpha}_C$ est le relèvement à X du point générique α_C de C , c'est-à-dire $\pi \circ \widehat{\alpha}_C = \alpha_C$. Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de \mathcal{N}_V .

Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : X \rightarrow V$. On pose $N'(E) := \{\alpha \in V_{\infty} \setminus (\mathrm{Sing} V)_{\infty} \mid \widehat{\alpha}(0) \in E\}$ et on note $N(E)$ l'adhérence dans V_{∞} de $N'(E)$. On peut montrer que $N(E)$ est irréductible et que $V_{\infty}^s = \bigcup_{E \in \mathrm{Ess}(V)} N(E)$. Les morphismes $\omega : \mathrm{Spec} K[[s, t]] \rightarrow V$ sont appelés K -wedges sur V . Les K -wedges sur V sont en correspondance bijectives avec les $K[[s]]$ -points de V_{∞} . L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\mathrm{Spec} K[[s]]$ dans V_{∞} est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω .

Soit E un diviseur essentiel sur V . Un K -wedge ω est appelé *K -wedge admissible centré en $N(E)$* si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de $N(E)$ (resp. appartient à V_∞^s). Dans [Reg06] (voir aussi l'article [LJ80]), l'auteur montre que E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si, pour tout corps d'extension K du corps résiduel du point générique de $N(E)$, tout K -wedge admissible centré en $N(E)$ se relève à X , c'est-à-dire il existe un K -wedge $\hat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \hat{\omega} = \omega$.

2.3. Rappels sur les Variétés Toriques et la Résolution des Singularités isolées d'hypersurfaces. Soient \mathbb{K} un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque et \mathbb{K}^\star son groupe multiplicatif. Un *tore algébrique* T de dimension n est une variété algébrique affine isomorphe à $(\mathbb{K}^\star)^n$. La structure de groupe multiplicatif de $(\mathbb{K}^\star)^n$ induit une structure de groupe sur T . Étant donné un tore algébrique T sur \mathbb{K} , une variété torique V est une variété algébrique contenant T , comme ouvert de Zariski dense, et munie d'une action du tore algébrique, $T \times V \rightarrow V$, prolongeant $T \times T \rightarrow T$. Toutes les variétés toriques que nous considérons dans la suite sont normales.

Les variétés toriques ont une relation étroite avec la géométrie convexe élémentaire. Dans la suite on donnera quelques détails de cette description.

Soit $N := \mathbb{Z}^n$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Le dual de N , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^n au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Un *cône convexe polyédral* ou plus simplement *cône* est tout ensemble σ de $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (resp. $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$) tel qu'il existe un entier s et des points v_i , $1 \leq i \leq s$ de $N_{\mathbb{R}}$ (resp. $M_{\mathbb{R}}$) tels que σ soit l'ensemble $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$ des combinaisons linéaires à coefficients réels non négatifs des v_i , $1 \leq i \leq s$. On note $\Delta := \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ le cône standard.

Le cône σ est fortement convexe s'il admet 0 pour sommet. Son intérieur σ^0 est, par définition, l'ensemble des éléments de σ qui n'appartient à aucune de ses faces strictes.

Un cône σ de $N_{\mathbb{R}}$ détermine un cône σ^\vee (resp. un sous-espace vectoriel σ^\perp) de $M_{\mathbb{R}}$ en posant σ^\vee (resp. σ^\perp) = $\{m \in M_{\mathbb{R}} \mid m|_\sigma \geq 0 \text{ (resp. } = 0)\}$. La correspondance $\sigma \rightarrow \sigma^\vee$ établit une bijection des cônes de $N_{\mathbb{R}}$ dans ceux de $M_{\mathbb{R}}$ puisque $\sigma = \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid n|_{\sigma^\vee} \geq 0\}$. Soit $\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M]$ la \mathbb{K} -algèbre du semigroupe $\sigma^\vee \cap M$. En vertu du Lemme de Gordan, la \mathbb{K} -algèbre $\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M]$ est de type fini.

On note T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$, $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbb{K}[\Delta^\vee \cap M]$, $1 \leq j \leq 4$, et (par abus de notation) 0 la T -orbite de dimension zéro de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := \text{Spec } \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. On remarque que $T = \text{Spec } \mathbb{K}[M]$.

On pose $U_\sigma = \text{Spec } \mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M]$. Le plongement canonique $\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M] \hookrightarrow \mathbb{K}[M]$ montre que U_σ est une variété torique affine normale sur \mathbb{K} .

Un éventail Σ est un ensemble fini de cônes fortement convexes dans $N_{\mathbb{R}}$ tel que :

- toute face d'un cône de Σ est dans Σ ;
- l'intersection de deux cônes de Σ est une face de chacun de ces deux cônes.

Étant donné un éventail Σ , on définit une variété torique $X(\Sigma)$ en recollant les variétés affines U_σ , quand σ parcourt Σ le long des ouverts définis par les faces communes, c'est-à-dire si σ_1 et σ_2 appartiennent à Σ , on a $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$.

Il est connu que toute variété torique normale est obtenue comme la variété torique associée à un éventail.

On dit que v est un *vecteur primitif* du réseau N (resp. M) si v engendre le \mathbb{Z} -module $\mathbb{R}v \cap N$ (resp. $\mathbb{R}v \cap M$). Les vecteurs primitifs des faces de dimension 1 d'un cône sont appelés les *vecteurs extrémaux* du cône. Si σ est un cône fortement convexe tel que $\sigma \neq \{0\}$, alors il est engendré par ses vecteurs extrémaux.

On appelle cône régulier tout cône fortement convexe dont les vecteurs extrémaux sont une partie d'une base du réseau. Un éventail Σ est appelé éventail régulier si tout cône $\sigma \in \Sigma$ est régulier. La variété torique $X(\Sigma)$ est non singulière si et seulement si l'éventail Σ est régulier.

Un théorème très intéressant de la théorie de variétés toriques est l'existence d'une désingularisation en caractéristique quelconque (Une désingularisation ou résolution des singularités d'une variété V est un morphisme propre et birationnel $\pi : X \rightarrow V$ tel que $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V)} : X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V) \rightarrow V \setminus \text{Sing } V$ est un isomorphisme, où X est une variété lisse et $\text{Sing } V$ est le lieu singulier de V). Plus précisément, soit $X(\Sigma)$ la variété torique associée à un éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe une désingularisation équivariante $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$, où Σ' est une subdivision régulière de Σ , c'est-à-dire tous les cônes de Σ sont réguliers. Pour plus de détails, voir [KKMS73] ou [CLS11].

Maintenant, on fait quelques rappels sur la résolution des singularités isolées d'hypersurfaces.

Soit $f = \sum c_e x^e \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $n \geq 3$, un polynôme, où $e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $x^e := x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ et $c_e \in \mathbb{K}$. On note $\mathcal{E}(f)$ l'ensemble des exposants $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, dont le coefficient c_e est non nul, c'est-à-dire $\mathcal{E}(f) := \{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid c_e \neq 0\}$.

Le polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$ associé à f est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{e + \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid e \in \mathcal{E}(f)\}$ et la frontière de Newton $\Gamma(f)$ est la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(f)$.

On note $\mathcal{I}(f)$ l'idéal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ engendré par les monômes x^e , $e \in \Gamma(f) \cap \mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire $\mathcal{I}(f) := (\{x^e \mid e \in \Gamma(f) \cap \mathbb{Z}^n\})$.

L'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à f est la subdivision du cône standard Δ correspondant à l'éclatement normalisé de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ de centre l'idéal $\mathcal{I}(f)$. En particulier $\mathcal{I}(f)\mathcal{O}_{X(\Gamma^*(f))}$ est un faisceau inversible.

Le polynôme f est appelé *non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton* si pour toute face compacte γ de $\Gamma_+(f)$, le polynôme $f_\gamma := \sum_{e \in \gamma} c_e x^e$ est non singulier sur le tore $T := N \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$, c'est-à-dire les polynômes f_γ , $\partial_{x_1} f_\gamma, \dots, \partial_{x_n} f_\gamma$ n'ont pas de zéro commun en dehors de l'ensemble $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$.

On définit sa fonction d'appui associée au polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$, $p \in \Delta$, par

$$h_f(p) = \inf\{\langle r, p \rangle \mid r \in \Gamma_+(f)\}.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire standard.

Il est connu que l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ satisfait la propriété suivante :

(\star) Soient $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ et $\sigma_J = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta \mid p_i = 0 \text{ ssi } i \notin J\}$. S'il existe $p \in \sigma_J$ tel que $h_f(p) = 0$, alors l'adhérence de σ_J dans Δ est un cône de $\Gamma^*(f)$.

Une subdivision régulière Σ de $\Gamma^*(f)$ est appelée *subdivision régulière admissible*, si l'éventail Σ satisfait la propriété (\star), c'est-à-dire s'il existe $n \in \sigma_J$ tel que $h_g(n) = 0$, alors $\bar{\sigma}_J \in \Sigma$. Pour plus de détails, voir [KKMS73] et [Var76].

Dans la proposition suivante, on suppose que V est une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, donnée par l'équation $f = 0$, où f est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$. De plus, on suppose que $0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ est l'unique point singulier de V .

Soit Σ une subdivision régulière admissible de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$. On note $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ le morphisme torique induit par la subdivision Σ du cône Δ et \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Par abus de notation, on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction du morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ à \tilde{V} .

La proposition suivante résulte des Lemmes 10.2 et 10.3 de [Var76] (pour plus de détails, voir [Mer80]).

Proposition 2.8. *Le morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est une désingularisation de V .*

Si l'hypersurface V ne contient aucune de T -orbite de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ de dimension strictement plus grande que zéro, alors le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ est une résolution plongée de V , c'est-à-dire $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ est un morphisme propre et birationnel, $\pi' : X(\Sigma) \setminus (\pi')^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{0\}$ est un isomorphisme et $(\pi')^{-1}(V)$ est un diviseur à croisements normaux.

Soient Σ' un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$ et σ un cône de Σ' . Nous appellerons *G-subdivision régulière* de σ , une subdivision régulière de σ , dont les vecteurs extrémaux sont exactement les éléments irréductibles du semi-groupe $\sigma \cap N$.

On dit qu'un éventail Σ'_G est une *G-subdivision régulière* de Σ' si chaque cône de Σ'_G est obtenu par une *G-subdivision régulière* d'un cône de Σ' . Le morphisme équivariant associé à une *G-subdivision régulière* de Σ' est appelé *G-désingularisation* de $X(\Sigma')$.

Il existe des exemples où un éventail Σ n'admet pas une *G-subdivision régulière* (voir [BGS92]). On remarque que si $\Gamma^*(f)$ admet une *G-subdivision régulière* $\Gamma^*(f)_G$, alors $\Gamma^*(f)_G$ est une subdivision régulière admissible.

3. FAMILLES D'ESPACES DE m -JETS ET D'ESPACES D'ARCS

Il est connu que les espaces de m -jets et l'espace d'arcs fournissent des informations sur la géométrie de la variété sous-jacente. Il est donc naturel de se poser la question suivante : Est-ce qu'une déformation de la variété V induit une déformation (compatible) des espaces de m -jets V_m et de l'espace d'arcs V_{∞} ? L'examen de cette question est le sujet de la sous-section 3.1, où on présente quelques résultats et quelques problèmes ouverts.

Dans la sous-section 3.2, on considère certaines déformations d'une variété ayant une singularité isolée qui admet certaines résolutions simultanées à plat (Autrement dit, de façon intuitive, la fibre exceptionnelle se déforme aussi) et on se pose la question suivante : Est-ce que la condition qu'un diviseur appartient à l'image de l'application de Nash est préservée par ce type de déformations ? On donne quelques réponses partielles à cette question.

3.1. Familles d'espaces de m -Jets et d'espaces d'arcs. Soient V une variété algébrique sur \mathbb{K} , S un schéma, $0 \in S$ un point fermé et W une déformation de V sur S , c'est-à-dire il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & W \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

où $W \rightarrow S$ est plat et $V \cong W \times_S \{0\}$. Par abus de notation, on note $\{0\}$ le sous-schéma de S associé au point 0.

Comme on a dit ci-dessus, on se pose la question suivante : Est-ce qu'une déformation W de la variété V induit une déformation des espaces de m -jets V_m et de l'espace d'arcs V_{∞} ?

En vertu des Théorèmes 2.5 et 2.6, et la Proposition 2.7, l'espace $W(S)_m$ est le candidat naturel pour être l'espace déformation de V_m , $1 \leq m \leq \infty$. La question est donc de savoir si

le morphisme $W(S)_m \rightarrow S$ est plat.

En général, le fait que le morphisme $W \rightarrow S$ soit plat n'implique pas que le morphisme $W(S)_m \rightarrow S$ le soit.

Exemple 1. Soient $V \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ une courbe donnée par le polynôme $x^3 + y^4 = 0$, $W \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}} : (x, y, s) \mapsto s$ la déformation donnée par le polynôme $x^3 + y^4 + s = 0$ et W_s la fibre sur $s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$. Pour tout $s \neq 0$ la variété W_s est lisse, on a donc que l'espace de 2-jet $(W_s)_2$ est une variété de dimension 3. Par contre, l'espace de 2-jet V_2 a une composante de dimension 4. Par conséquent le morphisme $W(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})_m \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ n'est pas plat.

La question est donc : Quand est-ce qu'une déformation de V induit une déformation de l'espace V_m , $1 \leq m \leq \infty$?

Dans la suite, on considère le cas de variétés localement intersection complète.

Soient n, p deux entiers positifs tels que $0 < p < n$, et $V \subset (\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n, 0)$ un germe d'un schéma intersection complète, définie par l'idéal $(f_1(x), \dots, f_p(x)) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, 0}$, où $x := (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, 0}$ est la fibre en 0 du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$.

On fixe un entier $l \geq 1$ et soient $F_1(x, s), \dots, F_p(x, s) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+l}, 0}$, où $s := (s_1, \dots, s_l)$, tels que $F_i(x, 0) = f_i(x)$, $1 \leq i \leq p$, et W le germe du schéma défini par l'idéal $I := (F_1(x, s), \dots, F_p(x, s)) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+l}, 0}$.

Dans les Sections 3 et 4 de [Art76], l'auteur montre que $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^l, 0}}(\mathbb{K}_{\mathbb{A}_0^l}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+l}, 0}/I) = 0$, où $\mathbb{K}_{\mathbb{A}_0^l}$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^l, 0}$. Ce qui implique, en utilisant le critère local de platitude (voir le Théorème 6.8 de [Eis95]), que le morphisme $\pi : W \rightarrow S; (x, s) \mapsto s$, où $S := \mathbb{A}_{\mathbb{K}, 0}^l$, est plat. En particulier W est une déformation de V .

Si V est un germe d'une variété intersection complète ayant une singularité isolée à l'origine 0, alors il existe un entier l et $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+l}, 0}$ tel que la déformation $\pi : W \rightarrow S$ est une déformation Verselle (voir [KS72]), c'est-à-dire s'il existe une autre déformation $\pi' : W' \rightarrow S'$ de V , alors il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ tel que la déformation W' est isomorphe à la déformation $W \times_S S'$.

Dans les résultats suivants, on suppose que V est un germe d'une variété intersection complète ayant une singularité isolée à l'origine 0 et que W est une déformation Verselle de V .

Le résultat suivant est une conséquence directe du critère local de platitude et de la Proposition 2.7.

Proposition 3.1. *On suppose que V_m est localement intersection complète, alors le morphisme $W(S)_m \rightarrow S$ est une déformation de V_m pour tout $1 \leq m \leq \infty$.*

L'espace de m -jets V_m est défini par $p(m+1)$ équations, mais en général cet espace n'est pas localement une intersection complète. En fait, si l'espace de m -jets V_m est localement une intersection complète (resp. irréductible) si et seulement si V est une singularité log-canonique (resp. rationnelle). Voir les articles [Mus01] et [EM04].

Le résultat suivant suit immédiatement de la Proposition 3.1 et du Théorème 0.1 de l'article antérieurement cité.

Théorème 3.2. *On conserve les notations ci-dessus et on suppose que la singularité de V est log-canonique. Alors l'espace $W(S)_m$ est une déformation de l'espace de m -jet V_m , $1 \leq m \leq \infty$.*

Dans le résultat suivant, on ne suppose pas que la singularité de V est de log-canonique.

Proposition 3.3. *Si $pm \leq n - p$, alors l'espace de m -jets V_m est localement une intersection complète. En particulier le morphisme $W(S)_m \rightarrow S$ est une déformation de V_m .*

Démonstration. Soit $\pi_m : V_m \rightarrow V$ la projection canonique. On a donc la décomposition suivante :

$$V_m = \pi_m^{-1}(\{0\}) \cup \overline{\pi_m^{-1}(V \setminus \{0\})}$$

On remarque que $\overline{\pi_m^{-1}(V \setminus \{0\})}$ est une composante irréductible de V_m de dimension $(n - p)(m + 1)$ et $\dim \pi_m^{-1}(0) \leq nm$. En vertu de la proposition 1.4 de [Mus01], V_m est une intersection complète si et seulement si $\dim V_m \leq (n - p)(m + 1)$. Ce qui achève la preuve de la proposition, car par hypothèse on a $nm \leq (n - p)(m + 1)$. \square

Maintenant, on suppose que $S = \text{Spec } \mathbb{K}[[s]]$ (ou $S := \text{Spec } \mathbb{K}[s]_{(s)}$), et soit V une variété quelconque et $W \rightarrow S$ une déformation de V . Le morphisme $p_m : W(S)_m \rightarrow S$, $m \geq 0$, est plat si et seulement si pour tout point associé $p \in W(S)_m$ (c'est-à-dire, tous les éléments de l'idéal maximal du point p sont des diviseurs du zéro), le point $p_m(p)$ est le point générique de S (voir la page 257 de [Har77]). Une partie de ce résultat peut s'écrire de la façon suivante :

Lemme 3.4. *On suppose que pour tout point $p \in V_m \subset W(S)_m$, il existe un arc $\alpha : \text{Spec } K[[s]] \rightarrow W(S)_m$, où K est une extension du corps \mathbb{K} , tel que l'image par α (resp. par $p_m \circ \alpha$) du point fermé 0 (resp. point générique η) de $\text{Spec } K[[s]]$ est le point p (resp. le point générique de S). Alors le morphisme $p_m : W(S)_m \rightarrow S$ est plat.*

Démonstration. On suppose qu'il existe un point associé $p \in W(S)_m$ tel que $p_m(p)$ soit le point fermé de S , alors $p \in V_m$. Comme p est un point associé, on a $\alpha(0) = \alpha(\eta) = p$. Ce qui est une contradiction, car $p_m(\alpha(\eta))$ est le point générique de S . \square

Le lemme 3.4 et la propriété fonctorielle de l'espace $W(S)_m$ motive la définition suivante :

Définition 3.5. *Soit m (resp. n) un entier supérieur ou égal à 0 (resp. 3). Un morphisme $\phi : \text{Spec } K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ est appelé (K, m) -jet sur $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.*

On dira que un S -morphisme $\Phi : \text{Spec } K[[s]][t]/(t^{m+1}) \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ est une déformation d'un (K, m) -jet ϕ , si la spécialisation en $s = 0$ de Φ est ϕ .

D'abord, on fixe quelques notations. Étant donné un polynôme $\varphi \in K[t]$, on note $\text{Ord}_t \varphi$ l'ordre en t du polynôme φ et on définit le m -ordre de φ , noté $\text{Ord}_t^m \varphi$, comme suit :

$$\text{Ord}_t^m \varphi := \begin{cases} \infty & \text{si } \varphi \equiv 0 \pmod{(t^{m+1})} \\ \text{Ord}_t \varphi & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque qu'on peut définir Ord_t^m sur l'anneau $K[t]/(t^{m+1})$.

Étant donné le (K, m) -jet, $\phi : \text{Spec } K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, on définit le m -ordre, $\text{Ord}_t^m \phi$, de ϕ de la façon suivante :

$$\text{Ord}_t^m \phi := (\text{Ord}_t^m \phi^*(x_1), \dots, \text{Ord}_t^m \phi^*(x_n)),$$

où ϕ^* est le co-morphisme de ϕ .

Avec la notation standard des multi-indices (c'est-à-dire on note $x^e = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ pour $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$), on considère la série formelle suivante :

$$\tau := \sum_{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_e x^e,$$

où $c_e \in K$ pour tout $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l$. L'ensemble $\mathcal{E}(\tau) := \{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid c_e \neq 0\}$ est l'ensemble des exposants de τ . Si la série formelle τ n'est pas nulle, alors l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$ n'est pas vide. Soient $v \in \mathbb{R}_{>0}^n$, on définit le v -ordre de τ , noté $\nu_v \tau$, et le (v, m) -ordre de τ , noté $\nu_v^m \tau$, de la façon suivante :

$$\nu_v \tau := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\tau)\}; \quad \nu_v^m \tau := \begin{cases} \infty & \text{si } \nu_v \tau > m \\ \nu_v \tau & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère une suite de polynômes $f, g_1, g_2, \dots \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $n \geq 3$, et on pose

$$F(x, s) := f(x) + s g_1(x) + s^2 g_2(x) + \dots,$$

où $x := (x_1, \dots, x_n)$ et f un polynôme irréductible non nul. Dans toute la suite, V est la variété définie par le polynôme f et W la déformation de V définie par $F \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_m][[s]]$ (voir page 79 de [EH00]).

Lemme 3.6. *Soit $\phi : \text{Spec } K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow V$ un (K, m) -jet et $v = \text{Ord}_t \phi$. On suppose que $\nu_v^m f = \min\{\text{Ord}_t^m \phi^*(x_i \partial_i f(x)) \mid 1 \leq i \leq n\}$ et que $\nu_v^m f \leq \nu_v^m g_j$, pour tout $1 \leq j$. Alors, il existe une déformation Φ du (K, m) -jet ϕ tel que $\Phi^*(F(x, s)) \equiv 0 \pmod{(t^{m+1})}$.*

Remarque 1 (Polynômes de Pham-Brieskorn). *On remarque que dans le cas où*

$$f := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_k^{a_k} + \dots + x_n^{a_n}, \quad a_k > 1,$$

et les polynômes g_i , $1 \leq i$, appartiennent à la clôture intégrale de l'idéal engendré par $x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n}$, les hypothèses du Lemme 3.6 sont toujours vérifiées.

Démonstration. Soit $\phi_i := \phi^*(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, et on pose $\Phi_i := \phi_i + s\psi_{1i} + s^2\psi_{2i} + s^3\psi_{3i} + \dots$, $1 \leq i \leq n$, où les ψ_{ji} appartient à $K[t]/(t^{m+1})$. On peut donc définir une déformation Φ du (K, m) -jet ϕ tel que $\Phi^*(x_i) := \Phi_i$, $1 \leq i \leq n$.

L'idée de la démonstration est de montrer qu'on peut choisir les $\psi_{ji} \in K[t]/(t^{m+1})$ de façon que $F(\Phi_1, \dots, \Phi_n, s) \equiv 0 \pmod{(t^{m+1})}$.

On pose $\overline{\Phi} := (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, $\overline{\phi} := (\phi_1, \dots, \phi_n)$, $\overline{\Psi} := \overline{\Phi} - \overline{\phi}$ et $\overline{\psi}_j := (\psi_{j1}, \dots, \psi_{jn})$. On remarque qu'on a toujours la formule suivante :

$$F(\overline{\Phi}, s) = f(\overline{\phi}) + s(\sum \partial_i f(\overline{\phi}) \psi_{1i} + T_1) + s^2(\sum \partial_i f(\overline{\phi}) \psi_{2i} + T_2) + \dots + s^j(\sum \partial_i f(\overline{\phi}) \psi_{ji} + T_j) + \dots$$

où T_j , $j \geq 1$, est défini de la manière suivante :

$$T_j := g_j(\overline{\phi}) + \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{1 \leq |\alpha| \leq j-l} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha g_l(\overline{\phi}) I_{j-l}(\alpha) + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\overline{\phi}) I_j(\alpha),$$

où $\partial_\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \sum \alpha_i$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, et $I_k(\alpha) := \frac{1}{k!} \partial_s^k \overline{\Psi}^\alpha \big|_{s=0}$, pour $1 \leq k \leq j$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

On remarque que si $1 \leq |\alpha|$ (resp. $2 \leq |\alpha|$) et $k' > k$ (resp. $k' \geq k$), alors $I_k(\alpha)$ ne dépend pas de $\overline{\psi}_{k'}$.

On va procéder par récurrence sur j pour montrer la propriété suivante :

(★) Il existe $\bar{\psi}_j$, tel que $\text{Ord}_t^m(\sum \partial_i f(\bar{\phi})\psi_{ji} + T_j) = \infty$ et $\text{Ord}_t^m \phi_i \leq \text{Ord}_t^m \psi_{ji}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Mais d'abord, on fait une remarque que l'on utilisera fréquemment dans cette démonstration :

Remarque 2. Soient $p, q, r \in K[t]/(t^{m+1})$ tel que $\text{Ord}_t^m pq \leq \text{Ord}_t^m r$, on remarque qu'il existe $w \in K[t]/(t^{m+1})$ tel que $\text{Ord}_t^m(pw - r) = \infty$ et $\text{Ord}_t^m q \leq \text{Ord}_t^m w$.

Par hypothèse, on a $\nu_v^m f = \min\{\text{Ord}_t^m \phi^*(x_i \partial_i f(x)) \mid 1 \leq i \leq n\}$ et $\nu_v^m f \leq \nu_v^m g_1$, $v = \text{Ord}_t \phi$. Comme $\nu_v^m g_1 \leq \text{Ord}_t^m g_1(\bar{\phi})$, on obtient qu'il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $\text{Ord}_t^m \partial_{i_0} f(\bar{\phi})\phi_{i_0} \leq \text{Ord}_t^m g_1(\bar{\phi})$. En utilisant la Remarque 2, on obtient qu'il existe $\bar{\psi}_1$ tel que $\text{Ord}_t^m(\sum \partial_i g_0(\bar{\phi})\psi_{1i} + T_1) = \infty$, où $\text{Ord}_t^m \phi_i \leq \text{Ord}_t^m \psi_{1i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On peut donc supposer qu'il existe un entier j_0 tel que la propriété (★) est vérifiée pour tout $j < j_0$. On va montrer que la propriété (★) est vérifiée pour j_0 .

Comme $\text{Ord}_t^m \phi_i \leq \text{Ord}_t^m \psi_{ji}$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < j_0$, on a $\nu_v^m f \leq \text{Ord}_t^m \partial^\alpha f(\bar{\phi})I_{j_0}(\alpha)$ (resp. $\nu_v^m g_l \leq \text{Ord}_t^m \partial^\alpha g_l(\bar{\phi})I_{j_0-l}(\alpha)$, $1 \leq l < j_0$), pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ tel que $2 \leq |\alpha| \leq j_0$ (resp. $1 \leq |\alpha| \leq j_0 - l$). Par conséquent, on a : $\nu_v^m f \leq \text{Ord}_t^m T_{j_0}$.

Comme $\nu_v^m f \leq \text{Ord}_t^m T_{j_0}$ et $\nu_v^m f = \min\{\text{Ord}_t^m \phi^*(x_i \partial_i f(x)) \mid 1 \leq i \leq n\}$, on obtient qu'il existe $\bar{\psi}_{j_0}$ tel que $\text{Ord}_t^m(\sum \partial_i f(\bar{\phi})\psi_{j_0 i} + T_{j_0}) = \infty$ et $\text{Ord}_t^m \phi_i \leq \text{Ord}_t^m \psi_{j_0 i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$ (voir la remarque 2). Ceci achève la démonstration du lemme \square

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des lemmes 3.4 et 3.6

Théorème 3.7. Soit $f := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_2^{a_k} + \dots + x_n^{a_n}$, $a_k > 1$, et on suppose que les polynômes g_i , $i \geq 1$, appartiennent à la clôture intégrale de l'idéal engendré par $x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n}$. Alors, le morphisme $p_m : W(S)_m \rightarrow S$ est plat pour tout $0 \leq m \leq \infty$. Autrement dit, $W(S)_m$ est une déformation de V_m .

Remarque 3. On remarque que la déformation W de la variété V du théorème ci-dessus est une déformation à nombre de Milnor constant. Est-ce que la question principale de cette section a une réponse affirmative dans le cas de déformation à nombre de Milnor constant ?

Plus précisément, soient $n \geq 3$, $f(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme qui n'est pas dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$ et $F(x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, s]$ une déformation de f à nombre de Milnor constant. Est-ce que $W(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})_m$ est une déformation de V_m ?

3.2. Familles d'espaces d'arcs et l'application de Nash. Dans cette section, V est une variété normale ayant une unique singularité isolée, notée 0, et W est une déformation de V qui admet une *résolution simultanée* à plat (voir [Tei80]). La définition suivante est plus restrictive que celle de l'article antérieurement cité, mais elle est la plus adaptée à nos problèmes.

Soit S un schéma et $s \in S$ un point. Par abus de notation, on note $\{s\}$ le sous-schéma de S associé au point s . Soit $0 \in S$ un point fermé de S . Une *déformation* W de V sur S le long d'une section $\sigma : S \rightarrow W$ est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ W & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

où le morphisme $W \rightarrow V$ est plat à fibres réduits et $V \cong W_0 := W \times_S \{0\}$.

Définition 3.8. Soit $\pi_0 : \tilde{V} \rightarrow V$ une désingularization telle que la fibre exceptionnelle $\pi_0^{-1}(0) = E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_l$ est un diviseur à croisements normaux et W une déformation de V sur S le long une section $\sigma : S \rightarrow W$. On suppose que $\sigma(s)$, $s \in S$, est l'unique point singulier de la variété $W_s := W \times_S \{s\}$. La déformation W admet une résolution simultanée à plat, s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1, E_2, \dots, E_l & \hookrightarrow & \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_l \quad (\tilde{E}_1)_s, \dots, (\tilde{E}_l)_s \hookrightarrow \tilde{W}_s := \tilde{W} \times_S \{s\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{V} & \hookrightarrow & \tilde{W} \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \pi \\
 V & \hookrightarrow & W \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \hookrightarrow & S
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \downarrow \pi_s \\
 W_s := W \times_S \{s\} \\
 \downarrow \\
 s
 \end{array}$$

(*)

où le morphisme $\pi : \tilde{W} \rightarrow W$ est une modification propre de W telle que $\pi_s : \tilde{W}_s \rightarrow W_s$ est une désingularization, où que la fibre exceptionnelle, $\pi^{-1}(\sigma(s)) = (\tilde{E}_1)_s \cup (\tilde{E}_2)_s \cdots \cup (\tilde{E}_l)_s$, est un diviseur à croisements normaux, et le schéma \tilde{W} (resp. la fibre schématique $\tilde{W} \times_W \sigma(S)$) est une déformation de \tilde{V} (resp. de la fibre schématique $\tilde{V} \times_V \{0\}$) sur S .

Exemple 2. Soit $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $n \geq 4$, un polynôme irréductible et non dégénéré par rapport à la frontière de Newton, et soient g_1, \dots, g_m des polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tels que tous les exposants de chaque polynôme g_i , $1 \leq i \leq m$, appartient au polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$. On pose $F(x, s) := f(x) + \sum s_i g_i(x)$, où $s := (s_1, \dots, s_m) \in S := \mathbb{A}_{\mathbb{K},0}^m$ et $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Soit V (resp. W) la variété définie par f (resp. F). On remarque que le morphisme naturel $W \rightarrow S$ est une déformation de V . Si V ne contient aucune des T orbites de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, alors la Proposition 2.8 montre que W admet une résolution simultanée à plat. En fait, à un changement de base près, toute déformation d'une hypersurface quasi-homogène V qui admet une résolution simultanée à plat équisingulier est obtenue de cette façon. Voir [Kou76], [O'S87], [ST04] et [Var82].

Pour chaque diviseur \tilde{E}_i , on note $N(\tilde{E}_i)$ l'adhérence dans $W(S)_\infty$ de l'ensemble suivant :

$$\{\alpha \in W(S)_\infty \setminus (\text{Sing } W)(S)_\infty \mid \hat{\alpha}(0) \in \tilde{E}_i\}$$

où $\hat{\alpha}$ est le relèvement à \tilde{W} de l'arc α . Étant donné $s \in S$, on pose $N(\tilde{E}_i)_s := N(\tilde{E}_i) \times_S \{s\}$. On remarque que $N(E_i) \subset N(\tilde{E}_i)_0 \subset V_\infty^s$.

Lemme 3.9. On conserve la notation employée auparavant et, en plus, on suppose que S est une variété sur \mathbb{K} . Alors $N(\tilde{E}_k)$ est irréductible pour tout $k \geq 1$.

Remarque 4. D'après le lemme ci-dessus, si s est le point générique de S , alors l'ensemble $N(\tilde{E}_k)_s$ est dense dans $N(\tilde{E}_k)$ pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. Soit $\pi_\infty : \tilde{W}(S)_\infty \rightarrow W(S)_\infty$ le morphisme induit par π . On pose $M(\tilde{E}_k) := \{\beta \in \tilde{W}(S)_\infty \mid \beta(0) \in \tilde{E}_k\}$ et on remarque que $N(\tilde{E}_k) = \pi_\infty(M(\tilde{E}_k))$. Il suffit donc de montrer que $M(\tilde{E}_k)$ est irréductible.

Étant donné un ouvert $U \subset \tilde{W}$, on peut supposer que $U(S)_m$ est un ouvert de $\tilde{W}(S)_m$, $0 \leq m \leq \infty$ (voir le Théorème 4.3 de [Voj07]).

Comme \tilde{W} et S sont de type fini sur \mathbb{K} , le morphisme $\tilde{W} \rightarrow S$ est un morphisme lisse de dimension relative $d = \dim \tilde{W} - \dim S$ (voir le Théorème 10.2 de [Har77]). Alors, en vertu de la Proposition 5.10 de [Voj07], pour chaque $x \in \tilde{E}_k$ il existe un ouvert $x \in U_x \subset \tilde{W}$ et un U_x -isomorphisme, $U_x(S)_m \cong \mathbb{A}_{U_x}^{dm}$, $0 \leq m \leq \infty$. En particulier $M(\tilde{E}_k) \cap U_x(S)_\infty$ est un

cylindre sur $\tilde{E}_k \cap U$. Comme $\tilde{E}_k \cap U$ est irréductible, on obtient que $M(\tilde{E}_k) \cap U_x(S)_\infty$ est irréductible pour chaque $x \in \tilde{E}_k$. Ce qui implique que $M(\tilde{E}_k)$ est irréductible. \square

Proposition 3.10. *Soient $S = \mathbb{A}_{\mathbb{K},0}$ et s le point générique de S . Si le diviseur E_i appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V , alors $N(\tilde{E}_i)_s \not\subset N(\tilde{E}_j)_s$ pour tout $j \neq i$.*

Démonstration. Pour chaque $m \geq 1$, soit $T_m : V_\infty \rightarrow V_m$ et $T(S)_m : W(S)_\infty \rightarrow W(S)_m$ les morphismes de troncature canoniques. Pour $m \geq 0$ et $k \geq 1$, on pose $CS_k^m := T(S)_m(N(\tilde{E}_k))$ et $C_k^m := \overline{T_m(N(E_k))}$. Comme $N(\tilde{E}_k)$, $k \geq 1$, est irréductible (voir le lemme précédent), on obtient que CS_k^m est irréductible.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 1$. Comme E_1 appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V , on a $N(E_1) \not\subset N(E_k)$ pour tout $k > 1$.

On suppose qu'il existe $j > 1$ tel que $N(\tilde{E}_1)_s \subset N(\tilde{E}_j)_s$. Ce qui implique que $N(\tilde{E}_1) \subset N(\tilde{E}_j)$, car $N(\tilde{E}_k)_s$ est dense dans $N(\tilde{E}_k)$ pour tout $k \geq 1$ (voir la Remarque 4).

Comme $N(\tilde{E}_1) \neq N(\tilde{E}_j)$, il existe $m \gg 0$ assez grand tel que $CS_1^m \subsetneq CS_j^m$ (en particulier $\dim CS_1^m < \dim CS_j^m$). De plus, on peut supposer que $C_1^m \not\subset C_k^m$ et $\text{codim}(N(E_k)) = \dim \overline{T_m(V_\infty)} - \dim C_k^m$ pour tout $k > 1$ (quitte à remplacer m par un entier plus grand).

On rappelle que CS_k^m , $k \geq 1$, est irréductible. Comme le morphisme induit par restriction $CS_k^m \rightarrow S$ est dominant et $S = \mathbb{A}_{\mathbb{K},0}$, on obtient que $CS_k^m \rightarrow S$, $k \geq 1$, est plat (voir la Proposition 9.7 de [Har77]).

Comme $\dim CS_1^m < \dim CS_j^m$, on obtient que $\dim C_1^m < \dim(CS_j^m \times_S \{0\})$. Ce qui implique qu'il existe au moins une composante irréductible de $CS_j^m \times_S \{0\}$ qui contient strictement l'ensemble C_1^m . Comme $CS_j^m \times_S \{0\} \subset \overline{T_m(V_\infty^s)}$, il existe $j' > 1$ tel que $C_1^m \subsetneq C_{j'}^m$, d'où la contradiction. \square

Soient $v := (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme quasi-homogène de type (s, v) , c'est-à-dire f est homogène de degré d par rapport à la graduation $\nu_v x_i = v_i$. Soit $h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tel que $\nu_v h > d$. On note V (resp. V') l'hypersurface donnée par l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ (resp. $f(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n) = 0$). On suppose que V (resp. V') a une unique singularité isolée à l'origine de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, V (resp. V') ne contient aucune de T -orbite de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ et f (resp. $f_1 := f + h$) est un polynôme non dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On remarque que le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}^n$ est une résolution plongée des variétés V et V' et que les fibres exceptionnelles des désingularisations $\pi_0 : X \rightarrow V$, $\pi_1 : X' \rightarrow V'$ induites pour la résolution plongée π sont trivialement homéomorphes. Dans le théorème suivant, par abus de notation, on utilise la même notation pour désigner les composantes irréductibles des fibres exceptionnelles de π_0 et π_1 .

Théorème 3.11. *Si le diviseur E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V , alors E appartient à l'application de Nash $\mathcal{N}_{V'}$.*

Démonstration. Soient $S := \mathbb{A}_{\mathbb{K},0}$, $F(x_1, \dots, x_n, s) := f(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{s^d} h(s^{v_1} x_1, \dots, s^{v_n} x_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A},0}[x_1, \dots, x_n]$ et W la déformation de V induite par F . Soit s le point générique de S . On remarque que $W_s \cong V_1 \times \{s\}$, ce qui implique que $W_s(\{s\})_\infty \cong V'_\infty \times \{s\}$. On suppose que E n'appartient pas à l'image de l'application de Nash $\mathcal{N}_{V'}$, alors il existe une composante irréductible E' de fibre exceptionnelle $\pi_1^{-1}(0)$ tel que $N(E) \subset N(E')$. D'où $N(E) \times \{s\} \subset N(E') \times \{s\}$. Par conséquence, on a $N(\tilde{E})_s \subset N(\tilde{E}')_s$. Ce qui rentre en contradiction avec la proposition 3.10. \square

4. DEUX FAMILLES D'EXEMPLES D'HYPERSURFACES DE $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ AVEC L'APPLICATION DE NASH BIJECTIVE

Dans cette section on considère deux familles d'hypersurfaces normales de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ et on montre que pour chaque hypersurface considérée, l'application de Nash qui y est associée est bijective.

De plus, dans chaque cas on donne explicitement une désingularisation où tous les composantes irréductibles de sa fibre exceptionnelle sont des diviseurs essentiels. Comme on a dit dans l'introduction, étant donné une variété V singulière et une désingularisation π de V , déterminer si une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π est ou non un diviseur essentiel est un problème qui est, en général, difficile à résoudre.

Dans les deux cas on utilise la même méthode de démonstration. Cette méthode est une adaptation de celle développée dans l'article [LA11].

Chaque famille d'hypersurface considérée est le sujet d'une des deux sous-sections suivantes.

4.1. La première famille d'exemples. Soit V l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ donnée par une équation du type :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$$

où $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers et h_q , k_{pq} sont deux polynômes homogènes sans facteur multiple. De plus, h_q (resp. k_{pq}) est de degré q (resp. pq) et le polynôme f n'est pas dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$.

Exemple 1. Le polynôme $f = x_1^q + x_2^q + x_3^{pq} + x_4^{pq}$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, satisfait les hypothèses ci-dessus. Dans ce cas la variété V est une hypersurface de Pham-Brieskorn.

Remarque 5. À un automorphisme linéaire de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ près, x_1 et x_2 (resp. x_3 , x_4) ne divisent pas h_q (resp. k_{pq}).

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 4.1. *L'application de Nash \mathcal{N}_V associée à l'hypersurface V est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V est égal à $(p-1)q + 1$.*

Le résultat suivant est une conséquence directe des Théorèmes 4.1, 3.11 et la Proposition 4.6. Soit $h \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ tel que les exposants de ses monômes appartiennent à l'ensemble $\Gamma_+(f) - \Gamma(f)$. On note V' l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ donnée par l'équation $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Corollaire 4.2. *L'application de Nash $\mathcal{N}_{V'}$ associée à l'hypersurface V' est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V' est égal à $(p-1)q + 1$.*

D'abord, on utilise la géométrie torique pour résoudre la singularité de V . Ensuite, on démontre le Théorème 4.1.

Par abus de notation, on note 0 l'origine de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$. La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 4.3. *L'hypersurface V est normale et le point 0 est son unique point singulier. De plus, V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement positive.*

En vertu des Propositions 2.8 et 4.3, pour résoudre la singularité de V , il suffit trouver une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$. Dans la suite, on montre explicitement une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$.

La Figure 1 représente la face compacte du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$, c'est-à-dire la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On rappelle que $f = h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$ et que x_1 et x_2 (resp. x_3, x_4) ne divisent pas h_q (resp. k_{pq}), voir la Remarque 5.

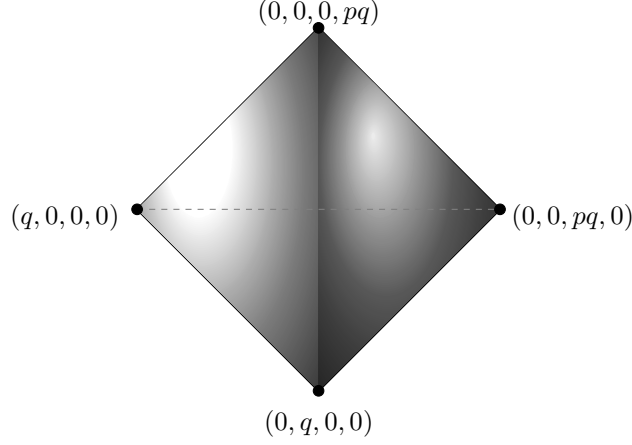


FIGURE 1. La frontière de Newton $\Gamma(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + h_{2q}(x_3, x_4)$

Soit H un hyperplan qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^4 et tel que $H \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ soit un ensemble compact. La Figure 2 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le vecteur primitif d'un cône de dimension 1 de l'éventail $\Gamma^*(f)$ (*vecteur extrémal*) correspondant.

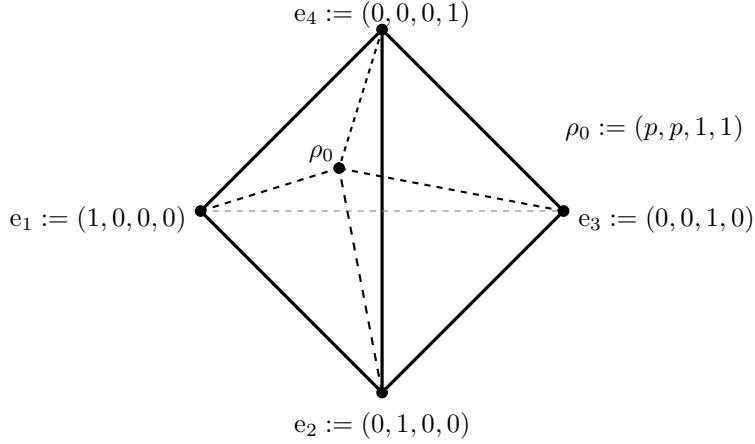


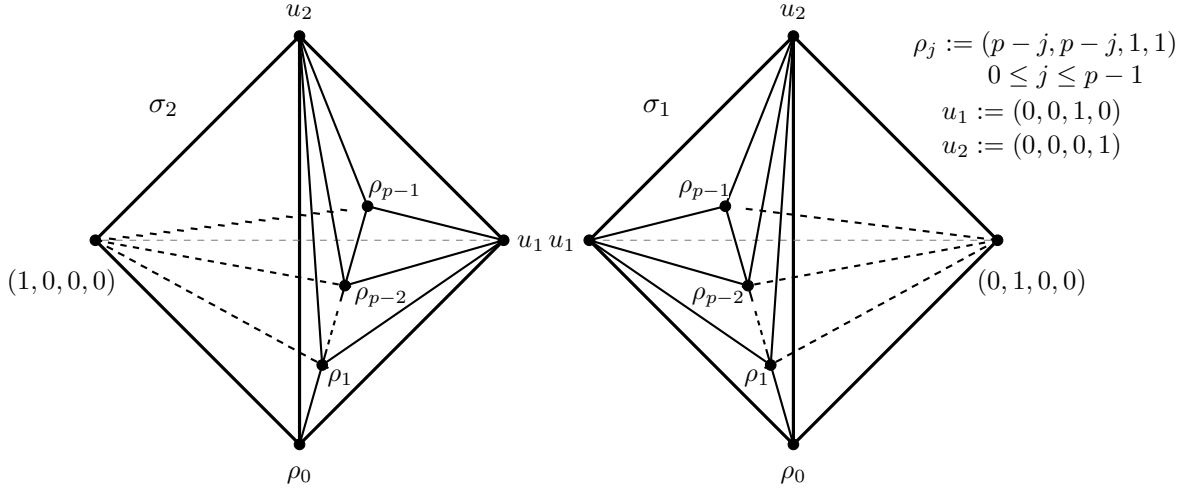
FIGURE 2. Section de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$

On note σ_j , $1 \leq j \leq 4$, le cône de dimension 4 de $\Gamma^*(f)$ engendré par le vecteur $(p, p, 1, 1)$ et l'ensemble $\{e_i \mid 1 \leq i \leq 4, i \neq j\}$.

La proposition suivante résulte d'un simple calcul.

Proposition 4.4. *Les cônes σ_3 et σ_4 sont réguliers.*

De gauche à droite : la Figure 3 représente l'intersection du plan H avec une subdivision du cône σ_2 et du cône σ_1 . On rappelle que chaque sommet des diagrammes est identifié avec le vecteur extrémal correspondant.


 FIGURE 3. Subdivision des cônes σ_1 et σ_2

Pour chaque paire d'entiers $1 \leq j < p-1$ et $1 \leq k \leq 2$, on note σ_{1jk} (resp. σ_{2jk}) le cône de dimension 4 engendré par le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ (resp. $(1, 0, 0, 0)$) et l'ensemble $\{\rho_{j-1}, \rho_j, u_k\}$, où $u_1 := (0, 0, 1, 0)$, $u_2 := (0, 0, 0, 1)$ et $\rho_j = (p-j, p-j, 1, 1)$.

On note σ_{1p-1} (resp. σ_{2p-1}) le cône engendré par le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ (resp. $(1, 0, 0, 0)$) et l'ensemble $\{u_1, u_2, \rho_{p-1}\}$. On remarque que l'ensemble $\{\sigma_{1jk}, \sigma_{2jk} \mid 1 \leq j < p-1, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_{1p-1}, \sigma_{2p-1}, \sigma_3, \sigma_4\}$ engendre un éventail, noté Σ .

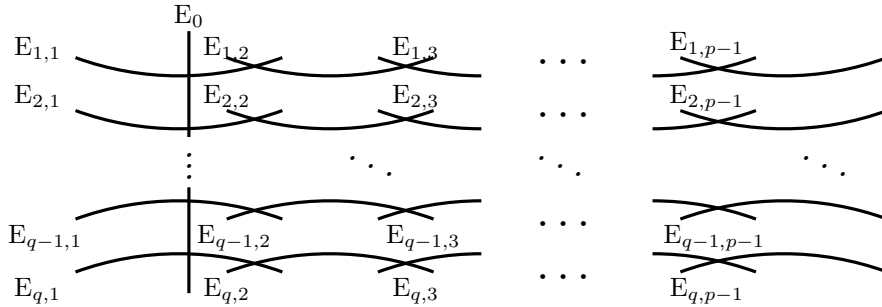
Par une simple inspection des cônes de l'éventail Σ , on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.5. *L'éventail Σ engendré par l'ensemble $\{\sigma_{1jk}, \sigma_{2jk} \mid 1 \leq j < p-1, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_{1p-1}, \sigma_{2p-1}, \sigma_3, \sigma_4\}$ est une G -subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^*(f)$.*

Soient $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ le morphisme torique induit par l'éventail Σ de la Proposition 4.5 et \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Par abus de notation, on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction de π à \tilde{V} .

En vertu de la correspondance orbites-cônes, les vecteurs ρ_j , $0 \leq j \leq p-1$, sont en correspondance biunivoque avec les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$. Pour plus de détails, voir [KKMS73] ou [CLS11]. Soit D_j le diviseur torique associé au vecteur ρ_j .

Proposition 4.6. *La fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur à croisements normaux qui est la réunion de $(p-1)q+1$ composantes irréductibles. Le diagramme suivant représente la fibre exceptionnelle de π :*



où $E_0 := D_0 \cap \tilde{V}$ et les diviseurs $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq q$, sont les composantes irréductibles de $D_j \cap \tilde{V}$, $1 \leq j \leq p-1$. Les intersections $E_0 \cap E_{i,1}$ et $E_{i,j} \cap E_{i,j+1}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p-2$, sont des

courbes lisses et irréductibles. De plus, les diviseurs $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p-1$ sont des variétés rationnelles.

Remarque 6. Dans les résultats suivants, on montre que les diviseurs essentiels sur V sont exactement les diviseurs exceptionnels de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$

Démonstration de la Proposition 4.6. Cette proposition peut être obtenue en utilisant les méthodes développées dans l'article [Oka87]. Or on va donner une preuve adaptée à notre cas.

On rappelle que le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ est une résolution plongée de V , d'où la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur à croisements normaux. Par conséquent, les intersections $E_0 \cap E_{i,1}$ et $E_{i,j} \cap E_{i,j+1}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p-2$ sont une réunion de courbes lisses.

On fixe un entier $1 \leq j < p-1$ et on considère le cône $\sigma_{2j2} \in \Sigma$. On rappelle que σ_{2j2} est le cône régulier engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $\rho_j = (p-j, p-j, 1, 1)$, $\rho_{j-1} = (p-j+1, p-j+1, 1, 1)$. On note $U (\cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4)$ l'ouvert torique qui est en correspondance avec le cône σ_{2j2} .

La restriction à U du morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ est définie de la façon suivante :

$$\pi|_U : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4) := (y_1 y_2^{p-j+1} y_3^{p-j}, y_2^{p-j+1} y_3^{p-j}, y_2 y_3, y_2 y_3 y_4).$$

On remarque que $U \cap \pi^{-1}(0) = \{y_2 = 0\} \cup \{y_3 = 0\}$. La variété $\tilde{V} \cap U$ est donnée par l'équation suivante :

$$h_q(y_1, 1) + y_2^{q(j-1)} y_3^{qj} k_{pq}(1, y_4) = 0.$$

Si $j = 1$, l'intersection $\tilde{V} \cap U \cap \{y_2 = 0\}$ est une variété irréductible et $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ est donnée par les équations $h_q(y_1, 1) = 0$, $y_3 = 0$. Par conséquent, $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ est la réunion disjointe de q composantes irréductibles (chaque composante irréductible est associée à une racine du polynôme $h_q(y, 1)$) et chaque composante irréductible est une variété rationnelle. Soient $w \in \mathbb{K}$ une racine du polynôme $h_q(y, 1)$ et F_w la composante irréductible de $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ associée à w . On remarque que $F_w \cap \{y_2 = 0\}$ est une courbe irréductible.

Si $j \geq 2$, les intersections $\tilde{V} \cap U \cap \{y_2 = 0\}$, $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ sont la réunion disjointe de q composantes irréductibles et chaque composante est une variété rationnelle. Soit $F_{2,w}$ (resp. $F_{3,w}$ la composante irréductible de $\tilde{V} \cap U \cap \{y_2 = 0\}$ (resp. $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$) associée à w , où $w \in \mathbb{K}$ une racine du polynôme $h_q(y, 1)$. Alors l'intersection $F_{2,w} \cap F_{3,w'}$ n'est pas vide si et seulement si $w = w'$. On remarque que $F_{2,w} \cap F_{3,w}$ est une courbe irréductible.

En procédant de la même manière sur tous les cônes qui contiennent les vecteurs extrémaux ρ_{j-1} et ρ_j , on obtient la proposition. \square

4.1.1. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash. Dans cette section, on démontre le Théorème 4.1 sur la bijectivité de l'application de Nash pour l'hypersurface V de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ donnée par une équation du type $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à une désingularisation de V (voir la section 2.2). Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E tous les K -wedges admissibles centrés en $N(E)$ se relèvent à la désingularisation \tilde{V} de la Proposition 4.6, où K est une extension du corps \mathbb{K} .

D'abord, on donne quelques résultats techniques. Ensuite, on démontre le Théorème 4.1.

On note g (resp. Par abus de notation, on note 0) le point générique (resp. fermé) de $\text{Spec } K[[t]]$. Étant donné un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$, $\alpha(0) = 0$, qui n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, on note $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{Z}_{>0}^4$ le *vecteur principal* du K -arc α , c'est-à-dire

$$\mu := (\text{Ord}_t \alpha^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha^*(x_4)).$$

où α^* est le comorphisme du K -arc α . On peut donc écrire le comorphisme α^* de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$.

Dans la proposition suivante, on utilise la notation ci-dessus et de la Proposition 4.6.

On remarque que si un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ n'est pas concentré en 0, alors α se relève à \tilde{V} , car le morphisme π est une désingularisation de V . De plus, si le point $\tilde{\alpha}(0)$ est le point générique d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π , alors le K -arc α n'est pas concentré en une hypersurface de V .

Proposition 4.7. *Soient $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la désingularisation de la Proposition 4.6, E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π et α un K -arc qui n'est pas concentré en 0 tel que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse à E . De plus, on suppose que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E . Alors, on a :*

- i) *si le diviseur E est le diviseur E_0 , alors le vecteur principal μ du K -arc α est le vecteur $\rho_0 = (p, p, 1, 1)$;*
- ii) *si le diviseur E est le diviseur $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p-1$, alors le vecteur principal μ du K -arc α est le vecteur $\rho_j = (p-j, p-j, 1, 1)$;*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la Proposition 2.12 de l'article [LA11]. Dans le but de fournir un texte auto-contenu, nous en donnerons quand même une preuve.

Comme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}^4$ est une résolution plongée de V , il existe un diviseur torique exceptionnel D de π qui est transverse à \tilde{V} et tel que E est une composante irréductible de $D \cap \tilde{V}$.

Étant donné un vecteur extrémal ϱ de Σ , on note D_ϱ le diviseur torique associé à ϱ . Soit ϱ_1 le vecteur extrémal de Σ tel que $D = D_{\varrho_1}$ et soient ϱ_i , $2 \leq i \leq 4$ des vecteurs extrémaux de Σ adjacents à ϱ_1 , c'est-à-dire il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ de dimension 4 tel que les vecteurs ϱ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont vecteurs extrémaux de σ .

L'entier $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ étant fixé, soit $m_i \in \mathbb{Z}^4$ un vecteur tel que le caractère χ^{m_i} associé à m_i soit une équation du diviseur $D_{\varrho_i} \cap U_\sigma$, (On rappelle que U_σ est l'ouvert torique de $X(\Sigma)$ associé au cône σ). On a donc $\langle m_i, \varrho_j \rangle = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Quitte à remplacer les vecteurs ϱ_i , $2 \leq i \leq 4$, on peut supposer que $U_\sigma \cap E \neq \emptyset$.

On rappelle que \hat{V} est transverse au diviseur D_{ϱ_1} . Comme le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse à E , le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse à D_{ϱ_1} .

Soit μ le vecteur principal de l'arc α . Comme $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E , on peut supposer que $\hat{\alpha}(0) \notin D_{\varrho_i}$, $i = 2, 3, 4$. Par conséquent, on obtient que $\langle m_i, \mu \rangle = \delta_{i1}$, $1 \leq i \leq 4$. Ceci implique que $\mu = \varrho_1$. En utilisant explicitement la résolution π , on achève la démonstration de la proposition. \square

Étant fixé une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ (π est la désingularisation de la Proposition 4.6), on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de $N(E)$, noté α_E , (resp. est un point qui appartient à V_∞^s), et on pose

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \text{Ord}_t \omega^*(x_3), \text{Ord}_t \omega^*(x_4)) \in \mathbb{Z}_{>0}^4,$$

où ω^* est le comorphisme du K -wedge ω . On peut écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

On pose

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_4)),$$

le vecteur principal du \mathbb{K}_{α_E} -arc α_E , où \mathbb{K}_{α_E} est le corps résiduel du point générique de $N(E)$.

D'après la Proposition 4.7, il existe un entier $0 \leq j \leq p-1$, tel que le vecteur principal du \mathbb{K}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (p-j, p-j, 1, 1)$. La proposition suivante est le résultat clé de la preuve du Théorème 4.1

Proposition 4.8. *Les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont inversibles.*

D'abord, finissons la preuve du Théorème 4.1. On remarque que la Proposition 4.8 est valable pour toute composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ et pour tout K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de $N(E)$ (resp. est un point qui appartient à V_∞^s). En vertu de la Proposition 4.8, le K -wedge ω se relève à \tilde{V} . Par conséquent, tout diviseur exceptionnel E de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur essentiel sur V qui appartient à l'image de l'application de Nash (voir section 2.2).

Démonstration de la Proposition 4.8. On définit l'application suivante :

$\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $\text{FI}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Alors on a :

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

De plus, φ_i $1 \leq i \leq 4$ est inversible si et seulement si $\mu_i - \eta_i = 0$.

On rappelle qu'il existe un entier $0 \leq j \leq p-1$, tel que le vecteur principal du \mathbb{K}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (p-j, p-j, 1, 1)$. Par conséquent, on a $\eta_3 = \eta_4 = \mu_3 = \mu_4 = 1$ et les séries formelles φ_3, φ_4 sont inversibles.

Si $j = p-1$, alors $\mu_1 = \mu_2 = \eta_1 = \eta_2 = 1$. Par conséquent, les séries φ_1 et φ_2 sont inversibles. Ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Dans la suite, on suppose que $j < p-1$.

Le K -wedge ω satisfait l'équation $h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4) = 0$, ainsi on obtient :

$$h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) + t^{pq} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

On rappelle que $h_q(x_1, x_2)$ est un polynôme homogène de degré q sans facteur multiple et que x_1 et x_2 ne le divisent pas (voir la Remarque 5).

On remarque que $\eta_i \leq \mu_i \leq p$. Si on suppose que $\eta_1 \neq \eta_2$, alors $\text{Ord}_t h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) < pq$. Ce qui n'est pas possible car $\text{Ord}_t t^{pq} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) \geq pq$. D'où $\eta_1 = \eta_2$.

Par conséquent, on a :

$$h_q(\varphi_1, \varphi_2) + t^{(p-\eta_1)q} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

Si $\eta_1 = p$, alors $\mu_1 - \eta_1 = \mu_2 - \eta_2 = 0$ car $\mu_i \leq p$, $i \in \{1, 2\}$, et $\eta_1 = \eta_2$. Comme $\text{FI}(\varphi_1) = \text{FI}(\varphi_2) = 0$, on obtient que les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles. Ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Dans la suite, on suppose que $\eta_1 < p$.

D'après la Remarque 5, on peut écrire le polynôme $h_q(x_1, x_2)$ de la façon suivante :

$$h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (a_i x_1 + b_i x_2),$$

où $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, pour tout $1 \leq i \leq q$. Ainsi on obtient la relation suivante :

$$\prod_{i=1}^q (a_i \varphi_1 + b_i \varphi_2) = -t^{(p-\eta_1)q} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$$

On remarque que t divise $a_i \varphi_1 + b_i \varphi_2$ si et seulement si t ne divise pas $a_{i'} \varphi_1 + b_{i'} \varphi_2$, pour tout $i' \neq i$. En effet, h_q est un polynôme sans facteur multiple. Donc, s'il existe $1 \leq i, i' \leq q$ tel que t divise $a_i \varphi_1 + b_i \varphi_2$ et $a_{i'} \varphi_1 + b_{i'} \varphi_2$, alors t divise φ_1 et φ_2 . Ce qui est absurde.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 = \lambda t^{(p-\eta_1)q}$, où λ est une série formelle qui appartient à $K[[s, t]]$. Ainsi on obtient la relation suivante :

$$\lambda \prod_{i=2}^q (a_i \varphi_1 + b_i \varphi_2) = k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4).$$

Le lemme suivant est le résultat clé pour la preuve de la Proposition 4.8

Lemme 4.9. *La série formelle $k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$ est inversible.*

D'abord, finissons la preuve de la Proposition 4.8. Comme $\mu_1 - \eta_1 = \mu_2 - \eta_2$, la série formelle φ_1 est inversible si et seulement si φ_2 l'est.

D'après le lemme précédent, la série formelle $k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$ est inversible. Ce qui implique que la série formelle $\lambda \prod_{i=2}^q (a_i \varphi_1 + b_i \varphi_2)$ est inversible. En particulier $a_2 \varphi_1 + b_2 \varphi_2$ est inversible, d'où les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles.

Démonstrations du Lemme 4.9. On rappelle que ω est un K -wedge admissible centré en $N(E)$ (voir la Section 2.2) et que α_E est le point générique de $N(E)$.

Soit $\lambda : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow \text{Spec } K[[s, t]]$ le morphisme induit par l'homomorphisme canonique $\lambda^* : K[[s, t]] \rightarrow K[[s, t]]/(s) = K[[t]]$. Alors, le morphisme $\alpha = \omega \circ \lambda$ est un K -arc sur V . On remarque que le K -arc α est un K -point de V_∞ au-dessus du point α_E .

Soit $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la désingularisation de la Proposition 4.6. En utilisant la propriété fonctorielle d'espace d'arcs V_∞ (voir le Théorème 2.6), on obtient que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse au diviseur E et que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E , car le centre du K -wedge ω est le point générique de $N(E)$. En particulier, le K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$.

On peut écrire le comorphisme α^* du K -arc α de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$. On note a_i le terme constant de la série inversible α_i , $1 \leq i \leq 4$.

On remarque que pour $i \in \{3, 4\}$, on a $\varphi_i = a_i + \varphi'_i$, où $\varphi'_i \in K[[s, t]]$, $i \in \{3, 4\}$, est une série formelle non inversible, car les séries formelles φ_3 et φ_4 sont inversibles. Ainsi, on a :

$$k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) = k_{pq}(a_3, a_4) + \psi,$$

où $\psi \in K[[s, t]]$ est une série formelle non inversible. Par conséquent, la série $k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$ est inversible si et seulement si $k_{pq}(a_3, a_4) \neq 0$.

On rappelle que d'après la Proposition 4.7, il existe un entier $0 \leq j < p - 1$, tel que le vecteur principal du K -arc α est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (p - j, p - j, 1, 1)$.

Soit $j' = j + 1$ et on considère le cône $\sigma_{2j'2} \in \Sigma$ (voir la Proposition 4.5). On rappelle que $\sigma_{2j'2}$ est le cône régulier engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$, $\rho_{j+1} = (p - j - 1, p - j - 1, 1, 1)$ et $\rho_j = (p - j, p - j, 1, 1)$. On note $U (\cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4)$ l'ouvert torique qui est en correspondance avec le cône $\sigma_{2j'2}$.

La restriction à U du morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ est définie de la façon suivante :

$$\pi|_U : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4) := (y_1 y_2^{p-j} y_3^{p-j-1}, y_2^{p-j} y_3^{p-j-1}, y_2 y_3, y_2 y_3 y_4).$$

On remarque que $U \cap \pi^{-1}(0) = \{y_2 = 0\} \cup \{y_3 = 0\}$. La variété $\tilde{V} \cap U$ est donné par l'équation suivante :

$$h_q(y_1, 1) + y_2^{qj} y_3^{q(j+1)} k_{pq}(1, y_4) = 0.$$

Si $j = 0$, le diviseur $E \cap U$ est donné par les équations suivantes :

$$h_q(y_1, 1) + y_3^q k_{pq}(1, y_4) = 0, y_2 = 0.$$

Si $1 \leq j \leq p - 2$, le diviseur $E \cap U$, $1 \leq i \leq q$, est une composante irréductible de

$$h_q(y_1, 1) = 0, y_2 = 0.$$

Soit $w_i \in \mathbb{K}^*$ la racine de $h_q(y, 1)$, tel que le diviseur $E \cap U$ est donné par les équations

$$y_1 = w_i, y_2 = 0.$$

Comme le K -arc α n'est pas concentré en un hyperplan x_i , $1 \leq i \leq 4$, et $\hat{\alpha}(0) \in U \cap \tilde{V}$, le K -arc $\hat{\alpha} : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow U \cap \tilde{V}$ est un morphisme bien défini. On peut donc écrire le comorphisme $\hat{\alpha}^*$ de la façon suivante :

$$\hat{\alpha}^*(y_i) = t^{r_i} \hat{\alpha}_i, 1 \leq i \leq 4,$$

où les $\hat{\alpha}_i$ sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$ et les r_i sont positifs, pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Soit $\hat{a}_i \in K^*$ le terme constant de $\hat{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 4$. Si $j = 1$ (resp. $j \geq 2$), alors le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse au diviseur E_0 (resp. $E_{i,j}$) et le point $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_0 (resp. $E_{i,j}$). Par conséquent, on a $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (0, 1, 0, 0)$ et $k_{pq}(1, \hat{a}_4) \neq 0$.

En utilisant le morphisme π , on obtient que :

$$\alpha_3 = \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3 \text{ et } \alpha_4 = \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_4.$$

Par conséquent, on a $k_{pq}(a_3, a_4) = (\hat{a}_2 \hat{a}_3)^{pq} k_{pq}(1, \hat{a}_4) \neq 0$, d'où le lemme. \square

Avec la démonstration du Lemme 4.9, on achève la preuve de la Proposition 4.8. \square

4.2. La deuxième famille d'exemples. On utilise les notations de la section 4.1. Soient un entier $q \geq 3$ et V une hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ donnée par une équation du type :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2),$$

où h_q et k_q sont deux polynômes homogènes de degré q sans facteur multiple. De plus, on suppose que le polynôme f n'est pas dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$ et que x_3 et x_4 ne divisent pas $k_q(x_3, x_4^2)$.

Exemple 2. Le polynôme $f = x_1^q + x_2^q + x_3^q + x_4^{2q}$, $q \geq 3$, satisfait les hypothèses ci-dessus. Dans ce cas la variété V est une hypersurface de Pham-Brieskorn.

Remarque 7. À un automorphisme linéaire de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ près, x_1 et x_2 ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 4.10. *L'application de Nash \mathcal{N}_V associée à l'hypersurface V est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V est égal à 2.*

Le résultat suivant est une conséquence direct des Théorèmes 4.1, 3.11 et la Proposition 4.6. Soit $h \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ tel que les exposants des monômes de h appartiennent à l'ensemble $\Gamma_+(f) - \Gamma(f)$. On note V' l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ donnée par l'équation $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Corollaire 4.11. *L'application de Nash $\mathcal{N}_{V'}$ associée à l'hypersurface V' est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V' est égal à 2.*

D'abord, on utilise la géométrie torique pour résoudre la singularité de V . Ensuite, on démontre le Théorème 4.10. La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 4.12. *L'hypersurface V est normale et le point 0 est son unique point singulier. De plus, V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement positive.*

D'après les résultats 2.8 et 4.12, si Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$, alors le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ associé à la subdivision régulière admissible Σ de $\Gamma^*(f)$ est une résolution plongée de l'hypersurface V .

Maintenant, on montre explicitement une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$.

La Figure 4 représente la face compacte du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$, c'est-à-dire la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On rappelle que $f = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$ et que x_1 et x_2 (resp. x_3, x_4) ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$ (resp. $k_q(x_3, x_4^2)$), voir la Remarque 7.

Soit H un hyperplan qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^4 et tel que $H \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ soit un ensemble compact. La Figure 5 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le vecteur extrémal correspondant.

On note σ_j , $1 \leq j \leq 4$, le cône de dimension 4 de $\Gamma^*(f)$ engendré par le vecteur $(2, 2, 2, 1)$ et l'ensemble $\{e_i \mid 1 \leq i \leq 4, i \neq j\}$.

La proposition suivante résulte d'un simple calcul.

Proposition 4.13. *Le cône σ_4 est régulier.*

La Figure 6 représente l'intersection du plan H avec une subdivision des cônes σ_1, σ_2 et σ_3 . Pour chaque entier $1 \leq j \leq 3$, on note σ_{j1} (resp. σ_{j2}) le cône de dimension 4 engendré par le vecteur ρ_1 et l'ensemble $\{\rho_0\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq 3, i \neq j\}$ (resp. $\{e_i \mid i \neq j\}$).

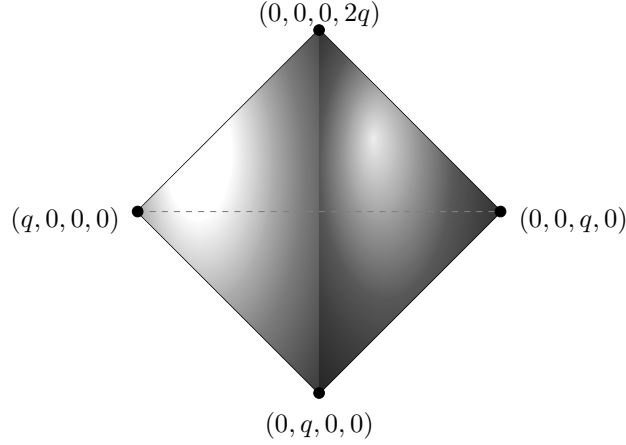


FIGURE 4. La frontière de Newton $\Gamma(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$.

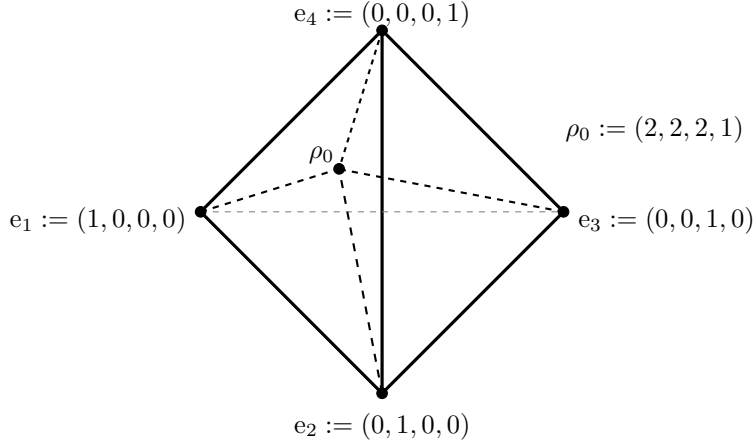


FIGURE 5. Section de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$

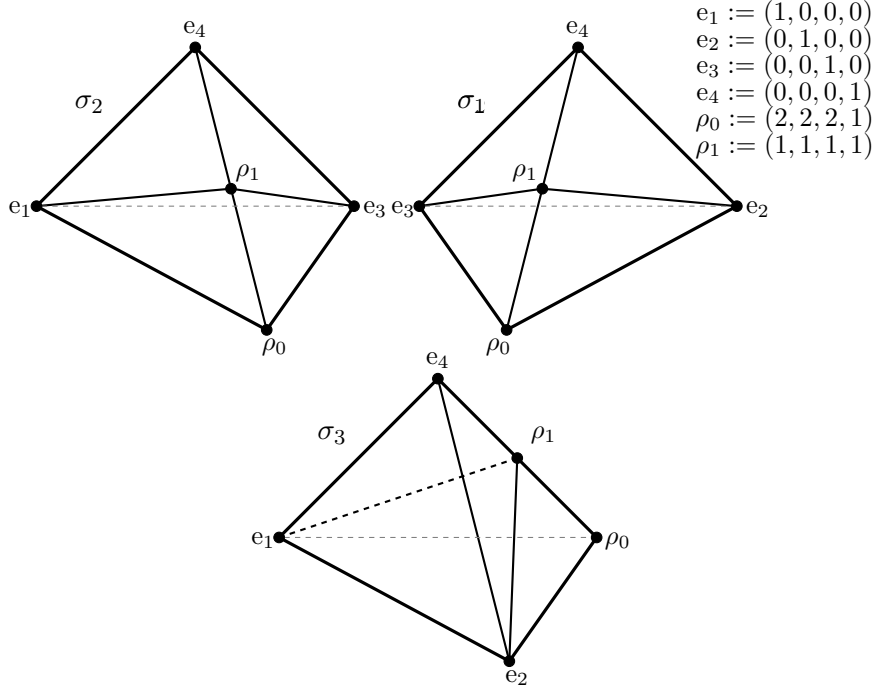
On remarque que l'ensemble $\{\sigma_{jk} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_4\}$ engendre un éventail, noté Σ .

Soient $\mathcal{B} := \{e_1, e_3, e_3, e_4\}$ la base ordonnée canonique de N et Δ le cône standard engendré par \mathcal{B} . Maintenant, on considère la subdivision du cône Δ suivante :

Soit Σ_1 la subdivision élémentaire de Δ centrée en $u = \sum_{i=1}^4 e_i$. Pour chaque entier j , $1 \leq j \leq 4$, on note \mathcal{B}_j la base ordonnée de N obtenue en remplaçant e_j par u dans la base \mathcal{B} . Soient $\Delta_j := \langle \mathcal{B}_j \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B}_j , pour $1 \leq j \leq 4$, et Σ_2 la subdivision de Σ_1 obtenue en remplaçant Δ_4 en Σ_1 par les cônes $\Delta_{4j} := \langle \mathcal{B}_{4j} \rangle$, où \mathcal{B}_{4j} est la base ordonnée de N obtenue en remplaçant le j -ième vecteur de \mathcal{B}_4 par $\sum_{u \in \mathcal{B}_4} u$.

On remarque que la suite de morphismes $X(\Sigma_2) \rightarrow X(\Sigma_1) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ est obtenue en éclatant deux points fermés.

Par une simple inspection des cônes des éventails Σ et Σ_2 , on obtient la proposition suivante :

FIGURE 6. Subdivision des cônes σ_1 , σ_2 et σ_3

Proposition 4.14. *L'éventail Σ engendré par l'ensemble $\{\sigma_{jk} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_4\}$ est une G -subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^*(f)$. De plus, Σ et Σ_2 sont les mêmes éventails.*

Soit $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ le morphisme torique induit par l'éventail Σ de la Proposition 4.14. On remarque que le morphisme π est une résolution plongée de V . Soit \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Par abus de notation, on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction de π à \tilde{V} .

On note Σ_0 l'éventail engendré par le cône Δ et B_i le diviseur exceptionnel de l'éclatement $X(\Sigma_i) \rightarrow X(\Sigma_{i-1})$, $1 \leq i \leq 2$. Par abus de notation, on note B_1 le transformé strict de B_1 dans $X(\Sigma_2)$. On pose $E_i := B_i \cap \tilde{V}$, $1 \leq i \leq 2$.

Par abus de notation, on note 0 l'origine de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$. Pour démontrer la proposition suivante, on peut appliquer la même méthode que celle utilisée pour la démonstration de la Proposition 4.6.

Proposition 4.15. *Les E_i sont des variétés lisses et irréductibles et l'intersection $E_1 \cap E_2$ est une variété lisse et irréductible. De plus, la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(0)$ de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est la réunion de E_1 et E_2 . En particulier $\pi^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux.*

Remarque 8. Dans les résultats suivants, on montre que les diviseurs essentiels sur V sont exactement les diviseurs exceptionnels de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$.

4.2.1. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash. Dans cette section, on démontre le Théorème 4.10 sur la bijectivité de l'application de Nash pour l'hypersurface V de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ donnée par une équation du type $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à une désingularisation de V . Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E tous les K -wedges admissibles centrés en $N(E)$ se relèvent à la désingularisation

\tilde{V} de la Proposition 4.15, où K est une extension du corps \mathbb{K} .

D'abord, on donne quelques résultats techniques. Ensuite, on démontre le Théorème 4.10.

On note 0 (resp g) le point fermé (resp. générique) de $\text{Spec } K[[t]]$. Étant donné un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$, $\alpha(0) = 0$, qui n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, on note $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{Z}_{>0}^4$ le *vecteur principal* du K -arc α , c'est-à-dire

$$\mu := (\text{Ord}_t \alpha^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha^*(x_4)).$$

où α^* est le comorphisme du K -arc α . On peut donc écrire le comorphisme α^* de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$.

Dans les résultats suivants, on utilise la notation ci-dessus et celle de la Proposition 4.15.

On remarque que si un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ n'est pas concentré en $0 \in V$, alors α se relève à \tilde{V} , car le morphisme π est une désingularisation de V . De plus, si le point $\tilde{\alpha}(0)$ est le point générique d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π , alors le K -arc α n'est pas concentré en une hypersurface de V .

Pour démontrer la proposition suivante, on peut appliquer la même méthode que celle de la démonstration de la Proposition 4.7.

Proposition 4.16. *Soient $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la désingularisation de la Proposition 4.15, E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π et α un K -arc qui n'est pas concentré en 0 tel que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse à E . De plus, on suppose que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E . Alors, si E est le diviseur E_1 (resp. E_2), alors le vecteur principal μ du K -arc α est le vecteur $\rho_1 = (1, 1, 1, 1)$ (resp. $\rho_0 = (2, 2, 2, 1)$).*

Étant fixé une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ (π est la désingularisation de la Proposition 4.15), on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de $N(E)$, noté α_E , (resp. est un point qui appartient à V_∞^s), et on pose

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \text{Ord}_t \omega^*(x_3), \text{Ord}_t \omega^*(x_4)) \in \mathbb{Z}_{>0}^4,$$

où ω^* est le comorphisme du K -wedge ω . On peut donc écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

On pose

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_4)),$$

le vecteur principal du \mathbb{K}_{α_E} -arc α_E , où \mathbb{K}_{α_E} est le corps résiduel du point générique de $N(E)$.

D'après la Proposition 4.16, si E est le diviseur E_1 (resp. E_2), alors le vecteur principal du \mathbb{K}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1, 1, 1, 1)$ (resp. $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1)$). On remarque que $1 \leq \eta_i \leq \mu_i \leq 2$, pour tout $1 \leq i \leq 4$, en particulier $\eta_4 = \mu_4 = 1$.

Soient $\phi \in K[[s, t]]$ une série formelle non nulle et $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$. Le vecteur v induit une graduation positive sur l'anneau $K[[s, t]]$, on note $\nu_v \phi$ (resp. ϕ_v) le v -ordre (resp. la v -partie principale) de ϕ .

Le lemme suivant est un résultat technique qu'on utilise dans la preuve du Théorème 4.10.

Lemme 4.17. *Si le K -wedge ω est centré en $N(E_2)$, alors il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que*

$$\nu_v h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) = \text{Deg}_t h_q(t^{\eta_1}(\varphi_1)_v, t^{\eta_2}(\varphi_2)_v) = 2q,$$

$$\nu_v k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = \text{Deg}_t k_q(t^{\eta_3}(\varphi_3)_v, t^2(\varphi_4^2)_v) = 2q.$$

Démonstration. On rappelle que α_{E_2} est le point générique de $N(E)$.

Soit $\lambda : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow \text{Spec } K[[s, t]]$ le morphisme induit par l'homomorphisme canonique $\lambda^* : K[[s, t]] \rightarrow K[[s, t]]/(s) = K[[t]]$. Alors, le morphisme $\alpha = \omega \circ \lambda$ est un K -arc sur V . On remarque que le K -arc α est un K -point de V_∞ au-dessus du point α_{E_2} .

En utilisant la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ , on obtient que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse au diviseur E_2 et que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_2 , car le centre du K -wedge ω est le point générique de $N(E_2)$.

D'après la Proposition 4.16, on peut écrire le comorphisme α^* de α de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1),$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$. On remarque qu'on a :

$$t^{\mu_i - \eta_i} \alpha_i = \lambda^* \circ \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \text{et} \quad \alpha_4 = \lambda^* \circ \varphi_4.$$

Soit $a_i \in K^*$ le terme constant de la série formelle α_i . Alors, il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que

$$(\varphi_i)_v = a_i t^{\mu_i - \eta_i}, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{et} \quad (\varphi_4)_v = a_4$$

En effet, il suffit de choisir $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que le nombre u soit "assez grand".

On rappelle que $\sigma_{11} \in \Sigma$ est le cône engendré par les vecteurs $\rho_0 = (2, 2, 2, 1)$, $\rho_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et que la restriction du morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ à l'ouvert $U := U_{\sigma_{11}}$ est donnée de la façon suivante :

$$\pi : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4, \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1^2 y_4, y_1^2 y_2 y_4, y_1^2 y_3 y_4, y_1 y_4)$$

L'intersection de \tilde{V} (resp. E_2) et U est donnée par l'équation suivante (resp. les équations suivantes) :

$$h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \quad (\text{resp. } h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \text{ et } y_1 = 0)$$

Comme le K -arc α n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, et $\hat{\alpha}(0) \in U \cap \tilde{V}$, $\hat{\alpha} : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow U \cap \tilde{V}$ est un morphisme bien défini. On peut donc écrire le comorphisme $\hat{\alpha}^*$ de la façon suivante :

$$\hat{\alpha}^*(y_i) = t^{r_i} \hat{\alpha}_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les $\hat{\alpha}_i$ sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$ et les r_i sont positifs, pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Soit $\hat{a}_i \in K^*$ le terme constant de $\hat{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 4$. On rappelle que le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse au diviseur E_2 et que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_2 . Par conséquent, on obtient que

$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1, 0, 0, 0)$, car le K -arc $\widehat{\alpha}$ est transverse au diviseur E_2 , et que $h_q(1, \widehat{a}_2) \neq 0$ et $k_q(\widehat{a}_3, \widehat{a}_4^2) \neq 0$, car le point $(0, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3, \widehat{a}_4)$ est le point générique de E_2 .

En utilisant le morphisme π , on obtient que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \widehat{\alpha}_1^2 \widehat{\alpha}_4, & \alpha_2 &= \widehat{\alpha}_1^2 \widehat{\alpha}_2 \widehat{\alpha}_4, \\ \alpha_3 &= \widehat{\alpha}_1^2 \widehat{\alpha}_3 \widehat{\alpha}_4, & \alpha_4 &= \widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_4. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$h_q(a_1, a_2) = (\widehat{a}_1^2 \widehat{a}_4)^q h_q(1, \widehat{a}_2) \neq 0,$$

$$k_q(a_3, a_4^2) = (\widehat{a}_1^2 \widehat{a}_4)^q k_q(\widehat{a}_3, \widehat{a}_4^2) \neq 0.$$

Comme il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que $(\varphi_i)_v = a_i t^{\mu_i - \eta_i}$, $1 \leq i \leq 3$ et $(\varphi_4)_v = a_4$, on obtient que

$$(h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2))_v = h_q(t^{\eta_1} (\varphi_1)_v, t^{\eta_2} (\varphi_2)_v) = t^{2q} h_q(a_1, a_2),$$

$$(k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2))_v = k_q(t^{\eta_3} (\varphi_3)_v, t^2 (\varphi_4^2)_v) = t^{2q} k_q(a_3, a_4^2).$$

Par conséquent, on a.

$$\nu_v h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) = \text{Deg}_t h_q(t^{\eta_1} (\varphi_1)_v, t^{\eta_2} (\varphi_2)_v) = 2q,$$

$$\nu_v k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = \text{Deg}_t k_q(t^{\eta_3} (\varphi_3)_v, t^2 (\varphi_4^2)_v) = 2q.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

La proposition suivante est le résultat clé de la preuve du Théorème 4.10

Proposition 4.18. *Les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont inversibles.*

D'abord, finissons la preuve du Théorème 4.10. Comme les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont inversibles, le K -wedge ω se relève à \widetilde{V} . On remarque que la Proposition 4.18 est valable pour toute composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \widetilde{V} \rightarrow V$ et pour tout K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de $N(E)$ (resp. est un point qui appartient à V_∞^s). Par conséquent on obtient que tout diviseur exceptionnel E de la désingularisation $\pi : \widetilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur essentiel sur V .

Démonstration de la Proposition 4.18. On rappelle que

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où $\text{FI}(\varphi_i)$ est le nombre de facteurs irréductibles de φ_i comptés avec multiplicité. De plus, φ_i , $1 \leq i \leq 4$ est inversible si et seulement si $\mu_i - \eta_i = 0$.

Si E est le diviseur E_1 , alors le vecteur principal du \mathbb{K}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1, 1, 1, 1)$. Par conséquent, $\text{FI}(\varphi_i) = 0$ (c'est-à-dire φ_i est inversible) pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Alors on peut supposer que E est le diviseur E_2 . Ainsi on obtient que $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1)$.

Comme $\eta_4 = \mu_4 = 1$, la série formelle φ_4 est inversible.

Raisonnons par l'absurde. On suppose que les séries formelles φ_1 , φ_2 et φ_3 ne sont pas simultanément inversibles. Par conséquent, il existe un entier $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\mu_{i_0} - \eta_{i_0} \neq 0$.

Le 3-squelette $S_3 \Gamma^*(f)$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ est la réunion des cônes de $\Gamma^*(f)$ de dimension inférieure ou égale à trois (voir la figure 5) et on dénote Δ^0 l'intérieur du cône standard. Un vecteur $v := (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \Delta^0$ définit naturellement une graduation strictement positive sur l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Soit f_v le terme principal du polynôme $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$ obtenu au moyen de cette graduation. Par définition de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, le vecteur v appartient à $S_3 \Gamma^*(f) \cap \Delta^0$ si et seulement si f_v n'est pas un monôme (voir la Section 2.3). Soit β l'arc générique du K -wedge ω . Comme $\beta^* f = 0$ (on rappelle que β^* est le comorphisme de β), on obtient que f_η , $\eta := (\eta_1, \eta_2, \eta_3, 1)$, n'est pas un monôme. Ce qui implique que $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, 1) \in S_3 \Gamma^*(f) \cap \Delta^0$.

Comme $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, 1) \in S_3 \Gamma^*(f) \cap \Delta^0$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1)$ et $1 \leq \eta_i \leq \mu_i$, $1 \leq i \leq 4$, les entiers η_1, η_2, η_3 satisfont une des relations suivantes :

- 1) $\eta_1 = \eta_2 = 1$ et $\eta_3 = 2$;
- 2) $\eta_1 = \eta_3 = 1$ et $1 \leq \eta_2 \leq 2$;
- 3) $\eta_2 = \eta_3 = 1$ et $1 \leq \eta_1 \leq 2$.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(1) \quad h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) + k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = 0.$$

On remarque que le cas 2) équivaut au cas 3), quitte à permuter les variables x_1 et x_2 . Il suffit donc de trouver une contradiction dans les Cas 1) et 2) pour achever la preuve de la Proposition 4.15.

Cas 1). On suppose que $\eta_1 = \eta_2 = 1$ et $\eta_3 = 2$.

Comme $\mu_3 = \eta_3 = 2$, on obtient que la série formelle φ_3 est inversible et que $k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = t^{2q} k_q(\varphi_3, \varphi_4^2)$. En vertu du lemme 4.17, on obtient que $\nu_v k_q(\varphi_3, \varphi_4^2) = 0$. Par conséquent, la série formelle $k_q(\varphi_3, \varphi_4^2)$ est inversible.

D'après la Relation 1, on obtient la relation suivante :

$$h_q(\varphi_1, \varphi_2) + t^q k_q(\varphi_3, \varphi_4^2) = 0.$$

On rappelle que h_q est un polynôme homogène de degré $q \geq 3$ sans facteur multiple et que x_1 et x_2 ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$. On peut donc supposer que $h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (b_i x_1 + c_i x_2)$, où $b_i, c_i \in \mathbb{K}^*$. Par conséquent, on a :

$$\prod_{i=1}^q (b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2) = -t^q k_q(\varphi_3, \varphi_4^2).$$

Comme le polynôme h_q n'a pas de facteur multiple, les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles ou divisibles par t , ce qui est absurde.

Cas 2). On suppose que $\eta_1 = \eta_3 = 1$ et $1 \leq \eta_2 \leq 2$.

D'après la Relation 1, on obtient la relation suivante :

$$h_q(\varphi_1, t^{\eta_2-1} \varphi_2) + k_q(\varphi_3, t \varphi_4^2) = 0.$$

On rappelle que x_1 et x_2 (resp. x_3 et x_4) ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$ (resp. $k_q(x_3, x_4^2)$). On peut donc supposer que

$$h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (b_i x_1 + c_i x_2), \text{ où } b_i, c_i \in \mathbb{K}^*.$$

$$k_q(x_3, x_4^2) = \prod_{i=1}^q (d_i x_3 + f_i x_4^2), \text{ où } d_i, f_i \in \mathbb{K}^*.$$

On pose $\gamma_i := b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2-1}$ et $\gamma'_i := d_i \varphi_2 + f_i \varphi_4^2 t$, $1 \leq i \leq q$. Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$(2) \quad \prod_{i=1}^q \gamma_i = - \prod_{i=1}^q \gamma'_i$$

Le lemme suivant nous permettra de construire un système de relations entre les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$

Lemme 4.19. *Les séries formelles γ_i et γ'_i , $1 \leq i \leq q$, sont irréductibles.*

Démonstration. D'après le Lemme 4.17, il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que $\nu_v(\prod_{i=1}^q \gamma_i) = \text{Deg}_t(\prod_{i=1}^q (\gamma_i)_v) = q$ et $\nu_v(\prod_{i=1}^q \gamma'_i) = \text{Deg}_t(\prod_{i=1}^q (\gamma'_i)_v) = q$.

Pour tout $i \in 1, 2, \dots, q$, les séries formelles γ_i et γ'_i ne sont pas inversibles, car les séries φ_1 , $t^{\eta_2-1} \varphi_2$, φ_3 et $t \varphi_4$ ne le sont pas. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \nu_v \gamma_i &= \text{Deg}_t((\gamma_i)_v) = \text{Deg}_t(b_1(\varphi_1)_v + t^{\eta_2-1} c_i(\varphi_2)_v) = 1 \text{ et} \\ \nu_v \gamma'_i &= \text{Deg}_t((\gamma'_i)_v) = \text{Deg}_t(d_i(\varphi_3)_v + t f_i(\varphi_4^2)_v) = 1, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq q$. Par conséquence, on obtient que les séries γ_i et γ'_i sont irréductibles, pour tout $1 \leq i \leq q$. \square

D'après le Lemme 4.19 et la Relation 2, on peut supposer, sans perte de généralité, que les γ_i et les γ'_i satisfont les relations suivantes :

$$\gamma_i = I_i \gamma'_i, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q,$$

où les $I_i \in K[[s, t]]$ sont des séries formelles inversibles telles que $\prod_{i=1}^q I_i = -1$. Autrement dit, on a le système suivant :

$$b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2-1} - d_i I_i \varphi_3 = f_i I_i \varphi_4^2 t, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q, \text{ et } \prod_{i=1}^q I_i = -1.$$

Soit M la matrice du système ci-dessus, c'est-à-dire

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & -d_1 I_1 \\ b_2 & c_2 & -d_2 I_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_q & c_q & -d_q I_q \end{pmatrix}$$

On pose

$$M_i := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & -d_1 I_1 \\ b_2 & c_2 & -d_2 I_2 \\ b_i & c_i & -d_i I_i \end{pmatrix},$$

pour $3 \leq i \leq q$. Le lemme suivant achève la démonstration.

Lemme 4.20. *Il existe $3 \leq i' \leq q$, tel que le déterminant $\det M_{i'}$ est une série inversible.*

D'abord, en utilisant le Lemme 4.20, on montre qu'on arrive aussi à une contradiction dans le Cas 2). Ce qui achève la preuve de la Proposition 4.18.

En vertu du Lemme 4.20, on peut supposer, quitte à permuter les lignes de la matrice M , que la matrice M_3 est inversible. Comme on a le système

$$b_i\varphi_1 + c_i\varphi_2 t^{\eta_2-1} - d_i I_i \varphi_3 = f_i I_i \varphi_4^2 t, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

et que la matrice M_3 est inversible, on obtient que les séries formelles φ_1, φ_3 sont divisibles par t . Ce qui est absurde.

Démonstration du Lemme 4.20. Comme le polynôme $h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (b_i x_1 + c_i x_2)$, $b_i, c_i \in \mathbb{K}^*$, n'a pas de facteur multiple, on obtient que $A := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Raisonnons par l'absurde, on suppose que pour tout $3 \leq i \leq q$ le déterminant $\det M_i$ n'est pas une série inversible. Comme la matrice A est de rang 2, il existe $\lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{K}^*$, $1 \leq i \leq q$, tels que $(b_i, c_i) = \lambda_i(b_1, c_1) + \lambda'_i(b_2, c_2)$. Ainsi on obtient :

$$\det M_i = (b_1 c_2 - b_2 c_1)(d_i I_i - \lambda_i d_1 I_1 + \lambda'_i d_2 I_2),$$

pour tout $3 \leq i \leq q$. En utilisant le système

$$b_i\varphi_1 + c_i\varphi_2 t^{\eta_2-1} - d_i I_i \varphi_3 = f_i I_i \varphi_4^2 t, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq q,$$

on obtient les relations suivantes

$$(d_i I_i - \lambda_i d_1 I_1 + \lambda'_i d_2 I_2)\varphi_3 = (f_i I_i - \lambda_i f_1 I_1 + \lambda'_i f_2 I_2)\varphi_4^2 t, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq q.$$

Comme les séries $\det M_i$ ne sont pas inversibles, on obtient les relations suivantes :

$$\lambda_i d_1 j_1 + \lambda'_i d_2 j_2 = d_i j_i,$$

$$\lambda_i f_1 j_1 + \lambda'_i f_2 j_2 = f_i j_i,$$

où j_i est le terme constant de la série inversible I_i , $1 \leq i \leq q$. Comme le polynôme $k_q(x, y) = \prod_{i=1}^q (d_i x + f_i y)$, $b_i, f_i \in \mathbb{K}^*$, n'a pas de facteur multiple, on obtient que la matrice $\begin{pmatrix} d_1 & f_1 \\ d_2 & f_2 \end{pmatrix}$ est inversible. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, il existe $l_i \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$j_i = l_i j_1.$$

Comme $\prod_{i=1}^q I_i = -1$, on obtient que $(\prod_{i=1}^q l_i) j_1^q = -1$. Par conséquent, on a $j_1 \in \mathbb{K}^*$.

Soient $\alpha_i, \hat{\alpha}_i, a_i, \hat{a}_i$, $i \leq i \leq 4$, et λ^* comme dans la démonstration du Lemme 4.17.

On rappelle que $\sigma_{11} \in \Sigma$ est le cône engendré par les vecteurs $\rho_0 = (2, 2, 2, 1)$, $\rho_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et que la restriction du morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ à l'ouvert $U := U_{\sigma_{11}}$ est donnée de la façon suivante :

$$\pi : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1^2 y_4, y_1^2 y_2 y_4, y_1^2 y_3 y_4, y_1 y_4)$$

L'intersection de \tilde{V} (resp. E_2) et U est donnée par l'équation suivante (resp. les équations suivantes) :

$$h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \quad (\text{resp. } h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \text{ et } y_1 = 0)$$

En utilisant le morphisme π , on obtient que :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \hat{\alpha}_1^2 \hat{\alpha}_4, & \alpha_2 &= \hat{\alpha}_1^2 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_4, \\ \alpha_3 &= \hat{\alpha}_1^2 \hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_4, & \alpha_4 &= \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_4.\end{aligned}$$

Maintenant on considère la relation

$$b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2-1} - d_1 I_1 \varphi_3 = f_1 I_1 \varphi_4^2 t$$

En utilisant le homomorphisme λ^* on obtient la relation suivante

$$(3) \quad b_1 + c_1 \hat{a}_2 - d_1 j_1 \hat{a}_3 - f_1 j_1 \hat{a}_4^2 = 0.$$

Ce qui est absurde. En effet, on considère le polynôme

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = b_1 + c_1 y_2 - d_1 j_1 y_3 - f_1 j_1 y_4.$$

Comme $j_1 \in \mathbb{K}^*$, on a $g \in \mathbb{K}[y_1, y_2, y_3, y_4]$.

Soit S l'adhérence dans \tilde{V} de l'hypersurface de U donnée l'équation $g = 0$. En vertu de la relation 3, on obtient que $\hat{\alpha}(0)$ appartient à l'hypersurface S , où $\hat{\alpha}$ est le relèvement de α à \tilde{V} et 0 est le point fermé de $K[[t]]$.

On remarque que les diviseurs S et E_2 sont transverses. Alors $\hat{\alpha}(0)$ appartient à l'intersection de S et E_2 ce qui est une contradiction car $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_2 . \square

On a montré que les Cas 1) et 2) conduisent à une contradiction. Par conséquent, on en déduit que les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont inversibles. \square

RÉFÉRENCES

- [Art76] Michael Artin. *Lectures on deformations of singularities*. The Tata Institute of Fundamental Research, Anil D. Ved At Prabhat Printers. Bombay 400 004, 1976.
- [BGS92] Catherine Bouvier and Gérard Gonzalez-Sprinberg. G -désingularisations de variétés toriques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(7) :817–820, 1992.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [dF13] Tommaso de Fernex. Three-dimensional counter-examples to the Nash problem. *Compos. Math.*, 149(9) :1519–1534, 2013.
- [dFD14] Tommaso de Fernex and Roi Docampo. Terminal valuations and the nash problem. arXiv :1404.0762 [math.AG], 3 april 2014. To appear in *Invent. Math.*
- [DL99] Jan Denef and François Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Invent. Math.*, 135(1) :201–232, 1999.
- [DL02] Jan Denef and François Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compositio Math.*, 131(3) :267–290, 2002.
- [EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [EM04] Lawrence Ein and Mircea Mustață. Inversion of adjunction for local complete intersection varieties. *Amer. J. Math.*, 126(6) :1355–1365, 2004.
- [EM09] Lawrence Ein and Mircea Mustață. Jet schemes and singularities. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 505–546. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [FdB12] Javier Fernandez de Bobadilla. Nash problem for surface singularities is a topological problem. *Adv. Math.*, 230 :131–176, 2012.
- [FdBP12] Javier Fernández de Bobadilla and María Pe Pereira. The Nash problem for surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 176(3) :2003–2029, 2012.
- [GP07] P. D. González Pérez. Bijectiveness of the Nash map for quasi-ordinary hypersurface singularities. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19) :Art. ID rnm076, 13, 2007.

- [GSLJ97] Gérard Gonzalez-Sprinberg and Monique Lejeune-Jalabert. Families of smooth curves on surface singularities and wedges. *Ann. Polon. Math.*, 67(2) :179–190, 1997.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [IK03] Shihoko Ishii and János Kollár. The Nash problem on arc families of singularities. *Duke Math. J.*, 120(3) :601–620, 2003.
- [Ish05] Shihoko Ishii. Arcs, valuations and the Nash map. *J. Reine Angew. Math.*, 588 :71–92, 2005.
- [Ish06] Shihoko Ishii. The local Nash problem on arc families of singularities. *Ann. Inst. Fourier*, 56(4) :1207–1224, 2006.
- [JK13] Jennifer M. Johnson and János Kollár. Arc spaces of cA -type singularities. *J. Singul.*, 7 :238–252, 2013.
- [KKMS73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [Kol12] János Kollár. Arc spaces of cA_1 singularities. Preprint, arXiv :1207.5036v2 [math.AG], jul 2012.
- [Kon95] Maxim Kontsevich. Motivic integration, 1995. *Lecture at Orsay*.
- [Kou76] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1) :1–31, 1976.
- [KS72] Arnold Kas and Michael Schlessinger. On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity. *Math. Ann.*, 196 :23–29, 1972.
- [LA11] Maximiliano Leyton-Alvarez. Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d’hypersurfaces quasi-rationnelles. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 20(3) :613–667, 2011.
- [LJ80] Monique Lejeune-Jalabert. Arcs analytiques et resolution minimale des singularites des surfaces quasi homogenes. In *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 303–336. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam, 1980.
- [LJRL99] Monique Lejeune-Jalabert and Ana J. Reguera-López. Arcs and wedges on sandwiched surface singularities. *Amer. J. Math.*, 121(6) :1191–1213, 1999.
- [Mer80] Michel Merle. Polyèdre de newton, éventails et désingularisation, d’après a. n. varchenko. In *Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Palaiseau, France, 1976-1977*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 289–294. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam, 1980.
- [Mor08] Marcel Morales. Some numerical criteria for the Nash problem on arcs for surfaces. *Nagoya Math. J.*, 191 :1–19, 2008.
- [Mus01] Mircea Mustață. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities. *Invent. Math.*, 145(3) :397–424, 2001. With an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel.
- [Nas95] John F. Nash. Arc structure of singularities. *Duke Math. J.*, 81(1) :31–38 (1996), 1995. A celebration of John F. Nash, Jr.
- [Oka87] Mutsuo Oka. On the resolution of the hypersurface singularities. In *Complex analytic singularities*, volume 8 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 405–436. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [O’S87] Donal B. O’Shea. Topologically trivial deformations of isolated quasihomogeneous hypersurface singularities are equimultiple. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101(2) :260–262, 1987.
- [Pet09] Peter Petrov. Nash problem for stable toric varieties. *Math. Nachr.*, 282(11) :1575–1583, 2009.
- [Plé08] Camille Plénat. The Nash problem of arcs and the rational double points D_n . *Ann. Inst. Fourier*, 58(7) :2249–2278, 2008.
- [PPP06] Camille Plénat and Patrick Popescu-Pampu. A class of non-rational surface singularities with bijective Nash map. *Bull. Soc. Math. France*, 134(3) :383–394, 2006.
- [PPP08] Camille Plénat and Patrick Popescu-Pampu. Families of higher dimensional germs with bijective Nash map. *Kodai Math. J.*, 31(2) :199–218, 2008.
- [PS12] Camille Plénat and Mark Spivakovsky. The nash problem of arcs and the rational double point \mathbf{E}_6 . *Kodai Math. J.*, 35(1) :173–213, 2012.
- [Reg95] Ana J. Reguera. Families of arcs on rational surface singularities. *Manuscripta Math.*, 88(3) :321–333, 1995.
- [Reg06] Ana J. Reguera. A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map. *Compos. Math.*, 142(1) :119–130, 2006.
- [ST04] Marcelo José Saia and João Nivaldo Tomazella. Deformations with constant Milnor number and multiplicity of complex hypersurfaces. *Glasg. Math. J.*, 46(1) :121–130, 2004.

- [Tei80] Bernard Teissier. Resolution Simultanée I, II. In *Séminaire sur les singularité des surfaces, Proc. 1976-77*, volume 777 of *Springer Lecture Notes in Math.*, pages 71–146. Springer, Berlin, 1980.
- [Var76] A. N. Varchenko. Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram. *Invent. Math.*, 37(3) :253–262, 1976.
- [Var82] A. N. Varchenko. A lower bound for the codimension of the $\mu = \text{const}$ stratum in terms of the mixed Hodge structure. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (6) :28–31, 120, 1982.
- [Voj07] Paul Vojta. Jets via Hasse-Schmidt derivations. In *Diophantine geometry*, volume 4 of *CRM Series*, pages 335–361. Ed. Norm., Pisa, 2007.

INSTITUTO MATEMÁTICA Y FÍSICA, UNIVERSIDAD DE TALCA, CAMINO LIRCAY S\N, CAMPUS NORTE, TALCA, CHILE

E-mail address: leyton@inst-mat.otalca.cl